

Darstellung von Iterationsverfahren zur Nullstellenbestimmung von Funktionen und visualisierende Computereperimente

Hausarbeit

zur Ersten Staatsprüfung

für das Lehramt an Gymnasien

im Fach Numerische Mathematik

an der Technischen Universität Chemnitz-Zwickau

vorgelegt von

Tino Hempel

Chemnitz, den 29. März 1996

Vorwort

Der Lehrplan für den Mathematikunterricht an Gymnasien fordert bereits in der achten Klasse die Bestimmung von Nullstellen von einfachen linearen Funktionen. Diese Aufgabenstellung wird in den folgenden Klassenstufen mehrfach aufgegriffen und vertieft und findet den schulische Abschluß im Grundkurs 12/II mit dem Thema „Numerische Verfahren (Ergänzungsthema zur Analysis)“. Der Lehrplan Gymnasium empfiehlt dabei:

„Bei der Behandlung dieses Themas sollte auf den Einsatz eines Computers bzw. programmierbaren und grafikfähigen Taschenrechners nicht verzichtet werden. Dabei könnten sowohl vom Schüler selbst entwickelte Programme als auch Standardsoftware (Funktionenplotter, Tabellenkalkulation) verwendet werden.“

An dieser Stelle setzt meine Hausarbeit an. Neben der mathematischen Beschreibung der Iterationsverfahren wurden diese mit den Mathematikprogrammen DERIVE, MathCad und MAYA umgesetzt. Die komplexen Mathematikprogramme Mathematica, Maple und MathLab kamen nicht zum Einsatz, da ihre Bedienung schwierig und ihr Einsatz an Schulen höchst unwahrscheinlich ist. Um keine Bindung an eine Programmiersprache vorzunehmen, habe ich Struktogramme zu den verschiedenen Verfahren eingebunden. Das Programm DERIVE wurde ausgewählt, da es schon an vielen Schule eingesetzt wird. MathCad 99 bietet sich aufgrund seiner einfachen Bedienung unter WINDOWS und seines günstigen Preises an. Das Programm MAYA gehört zu [8] und wurde ausschließlich zu Visualisierungszwecken geschrieben.

Auf der beiliegenden Diskette finden Sie den Sourcecode der beschriebenen Beispiele für die beiden Programme DERIVE und MathCad. Das Programm MAYA darf aus urheberrechtlichen Gründen nicht weitergegeben werden.

Herzlich danken möchte ich meinem Gutachter Herrn Prof. Dr. A. Meyer für Hinweise und Diskussionen zu mathematischen Teilfragen.

Chemnitz, den 29. März 1996

Tino Hempel

Inhaltsverzeichnis

1 EINLEITUNG	1
2 LOKALISIERUNG DER NULLSTELLEN.....	2
2.1 BEGRIFFSBESTIMMUNG.....	2
2.2 DIE GRAFISCHE METHODE	2
2.2.1 Beschreibung	2
2.2.2 Funktionsdarstellung mit dem Programm MAYA	4
2.2.3 Funktionsdarstellung mit dem Programm DERIVE.....	4
2.2.4 Darstellung mittels MathCad.....	5
2.3 BISEKTIONSVERFAHREN - INTERVALLHALBIERUNGSMETHODE.....	5
2.3.1 Beschreibung	5
2.3.2 Programmierung	7
2.3.3 Visualisierung mittels MathCad.....	7
2.3.4 Darstellung mittels DERIVE.....	9
3 ITERATIONSVERFAHREN.....	13
3.1 VORBEMERKUNGEN	13
3.2 ALLGEMEINE ITERATION - SUKZESSIVE APPROXIMATION	14
3.2.1 Mathematische Beschreibung	14
3.2.2 Programmierung	23
3.2.3 Darstellung mittels DERIVE.....	23
3.2.4 Darstellung mittels MAYA.....	25
3.2.5 Darstellung mittels MathCad.....	25
3.3 DIE NEWTONVERFAHREN	27
3.3.1 Mathematische Beschreibung des klassischen Newtonverfahren.....	27
3.3.1.1 Iterationsvorschrift und Iterationsbedingungen.....	27
3.3.1.2 Konvergenz des Verfahrens und Konvergenzordnung.....	29
3.3.1.3 Fehlerabschätzungen	30
3.3.1.4 Programmierung.....	32
3.3.2 Darstellung mittels MAYA.....	32
3.3.3 Darstellung mittels DERIVE.....	32
3.3.4 Darstellung mittels MathCad.....	33
3.3.5 Mathematische Beschreibung des Modifiziertes Newtonverfahren	35
3.3.6 Mathematische Beschreibung des Vereinfachten Newtonverfahrens	37
3.4 SEKANTENVERFAHREN - REGULA FALSI.....	38
3.4.1 Mathematische Beschreibung	38
3.4.2 Programmierung	41
3.4.3 Darstellung mittels MAYA.....	41
3.4.4 Darstellung mittels DERIVE.....	41
3.4.5 Darstellung mittels MathCad.....	42
3.5 STEFFENSEN-VERFAHREN.....	44
3.5.1 Mathematische Beschreibung	44
3.5.2 Programmierung	47
3.5.3 Darstellung mittels MAYA.....	47
3.5.4 Darstellung mittels DERIVE.....	48
3.5.5 Darstellung mittels MathCad.....	49
4 AUSBLICK.....	51
LITERATURVERZEICHNIS	52
ERKLÄRUNG.....	55

1 Einleitung

Zu einem Grundproblem der Mathematik gehört unter anderem folgende Aufgabenstellung:

In einem Intervall $[a, b]$ sei eine reelle Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ mit einer reellen Veränderlichen x definiert. Gesucht sind Zahlen $x_n \in [a, b]$ mit $f(x_n) = 0$. Solche Zahlen nennt man **Nullstellen der Funktion $f(x)$** bzw. **Lösungen (Wurzeln) der Gleichung $f(x) = 0$** . Die Frage, ob und wieviel solche Zahlen x_n existieren, hängt von der gegebenen Funktion $f(x)$ ab.

Bereits in der Schule werden Möglichkeiten der Berechnung dieser Zahlen x_n behandelt, allerdings nur für spezielle Funktionen $f(x)$. Für den Spezialfall eines algebraischen Polynoms der Gestalt

$$f(x) = \sum_{k=0}^i a_k x^k, \quad a_k \in \mathbf{R}, \quad a_i \neq 0,$$

suchten die Mathematiker lange Zeit nach geeigneten Lösungsformeln. Für den Fall $i = 1$ erhält man eine lineare Gleichung $a_1 x + a_0 = 0$ mit $a_1 \neq 0$. Die gesuchte Nullstelle ergibt sich damit zu $x_1 = -\frac{a_0}{a_1}$.

Die aus der Schule bekannte allgemeine Lösungsformel für quadratische Gleichungen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

läßt sich zum Lösen des Polynoms $x^2 + px + q = 0$ verwenden; sie liefert für $\frac{p^2}{4} - q \geq 0$ reelle Lösungen.

Auch für kubische Gleichungen der Form $x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ und Gleichungen vierten Grades der Form $x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ lassen sich noch Formelsätze angeben. Allerdings sind diese sehr schwer zu handhaben, da in mehreren Schritten und mit Fallunterscheidungen gearbeitet werden muß. Für allgemeine Polynome fünften oder höheren Grades wiesen GALOIS¹ (1832) und ABEL² (1829) unabhängig voneinander nach,

¹ Evariste Galois (1811 - 1832), französischer Mathematiker

² Niels Hendrik Abel (1802 - 1829), norwegischer Mathematiker

daß diese nicht formelmäßig durch Wurzelausdrücke lösbar sind. Auch nichtlineare Funktionen lassen im allgemeinen keine Bestimmung von Nullstellen mittels Lösungsformeln oder elementaren Umformungen zu. Die gesuchten Wurzeln errechnet man dann häufig durch numerische Algorithmen näherungsweise. Diese numerischen Algorithmen heißen Iterationsverfahren. Iterieren³ im Sinne des Lösens der Gleichung $f(x) = 0$ bedeutet, eine bestimmte mathematische Vorschrift solange zu wiederholen, bis die gesuchte Nullstelle exakt oder mit einer vorgegebenen Genauigkeit gefunden ist. Dazu wird eine erste grobe Lokalisierung der Nullstelle benötigt.

2 Lokalisierung der Nullstellen

2.1 Begriffsbestimmung

Eine Lokalisierung der Nullstelle wird durchgeführt, um einen Überblick über die Lage der Nullstellen von $f(x)$ zu erhalten. Des weiteren ist jede Nullstelle in ein hinreichend kleines Intervall einzuschließen, so daß im Inneren keine weitere Nullstelle liegt. Sind für eine vorgegebene Funktion $f(x)$ Intervalle

$$I_n = \{x: |x - \alpha_n| \leq r_n\}$$

bekannt, in denen jeweils nur eine Nullstelle x_n von $f(x)$ liegt, so sagt man, die Nullstellen von $f(x)$ sind **lokalisiert**. Eine gute Lokalisierung liefert bereits erste grobe Näherungswerte für die gesuchten Nullstellen. Im folgenden werden zwei Methoden der Lokalisierung angegeben.

2.2 Die grafische Methode

2.2.1 Beschreibung

Die einfachste Variante der Lokalisierung von Nullstellen einer Funktion ist die grafische Methode. Dazu zeichnet man mit Hilfe einer Wertetabelle und analytischer Untersuchungen den Graphen der Funktion $y = f(x)$ möglichst genau. Aus der grafischen Darstellung können nun die gesuchten Intervalle für die Nullstelle abgelesen werden. Für das Anfertigen einer Skizze von Hand ist es oft günstiger, die Gleichung $f(x) = 0$ in die

³ iterare (lat.) = wiederholen

Form $f_1(x) = f_2(x)$ zu bringen. Die Intervalle für die gesuchten Nullstellen der Funktion $f(x)$ lassen sich dann aus den Schnittpunkten der Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ ablesen.

Natürlich kann für die grafische Darstellung auch ein geeignetes Computerprogramm genutzt werden. Hierbei sollte beachtet werden, daß solche Programme den Graphen nur durch Berechnung von einzelnen Punkten und anschließender Interpolation zeichnen. Deshalb kann es in Bereichen von Polstellen und starken Veränderungen der Funktion zu Ungenauigkeiten der Darstellung kommen.

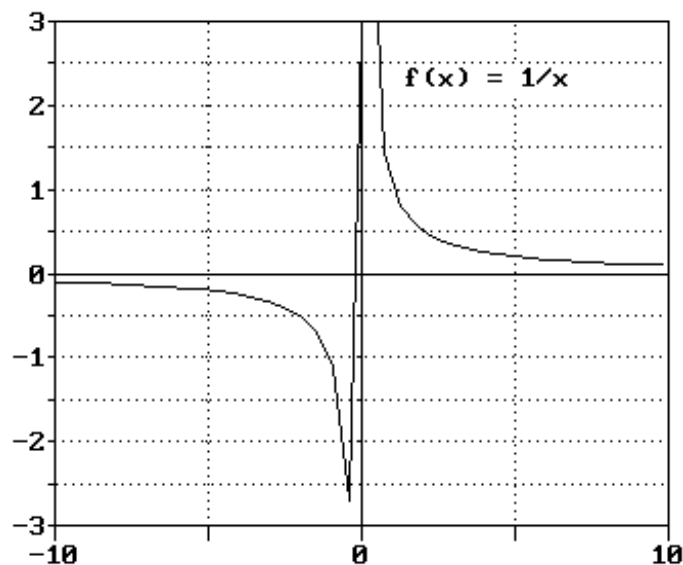


Abb. 1: Darstellung der Funktion $y = 1/x$ mit $x \in [-10, 10]$ durch das Programm Matheass 6.3. Das Programm erkannte die Polstelle bei $x = 0$ nicht. Die falsch eingezeichnete Gerade offeriert eine nicht vorhandene Nullstelle.

Beispiel 1:

Für die Funktion f mit

$$f(x) = x^5 - 3x + 1$$

soll auf grafischem Wege eine Lokalisierung der Nullstellen erfolgen. Es ist also die Gleichung

$$0 = x^5 - 3x + 1$$

zu lösen. Es bietet sich eine Umformung dieser Gleichung zu

$$x^5 = 3x - 1$$

an. Damit ergeben sich die beiden zu zeichnenden Funktionen

$$f_1 \text{ mit } f_1(x) = x^5 \text{ und}$$

$$f_2 \text{ mit } f_2(x) = 3x - 1.$$

Aus der Abb. 2 lassen sich nun folgende Intervalle ablesen:

$$I_1 = [-1,5; -1,3], \quad I_2 = [0,2; 0,4], \quad I_3 = [1,2; 1,3].$$

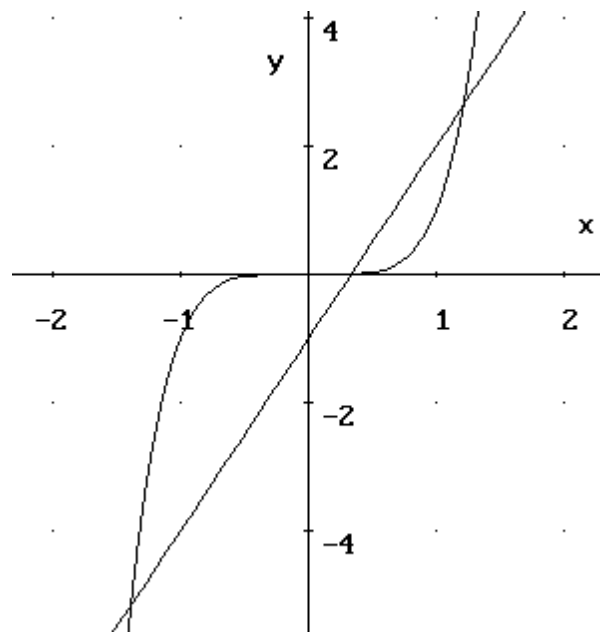


Abb. 2: Grafische Nullstellenbestimmung der Funktion $f(x) = x^5 - 3x + 1$

2.2.2 Funktionsdarstellung mit dem Programm MAYA

Um mit dem Programm MAYA zwei Graphen zu zeichnen, wählt man den Menüpunkt *Funktionen - Kurve mehrerer Funktionen* aus. In der erscheinenden Eingabemaske müssen die Funktionen in PASCAL-ähnlicher Syntax eingegeben werden. Als Grundrechenoperatoren finden die Symbole „+“, „-“, „*“ und „/“ Verwendung. Außerdem gilt als Potenzierungsoperator das Symbol „^“. Weiter vordefinierte Operatoren sind in der Hilfe und in [8] aufgelistet.

Die beiden Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ werden mit Definitions- und Wertebereich in die Maske eingegeben und schließlich mit F2 gezeichnet.

2.2.3 Funktionsdarstellung mit dem Programm DERIVE

Für die Darstellung mit DERIVE müssen die beiden Funktionen zunächst im Algebra-Fenster eingegeben werden. Anschließend erfolgt die grafische Darstellung mit den Tastenkombinationen *Plot - Plot*. Hierbei muß die zu zeichnende Funktion im Algebra-Fenster gewählt sein. Das Resultat zeigt Abb. 2.

2.2.4 Darstellung mittels MathCad

In MathCad können die Funktionen direkt auf dem Arbeitsfeld erstellt werden. Dazu sind zuerst der Definitionsbereich und anschließend die beiden Funktionen einzugeben. Die grafische Darstellung erfolgt nach Wahl des entsprechenden Symbols in der Tool-Box und der Eingabe der Achsenbeschriftungen.

Beispiel 2:

Gegeben sei die Funktion: $f(x) := x^5 - 3 \cdot x - 1$ mit $x := -1.5, -1.49 \dots 1.5$

Man bildet daraus die Funktionen $f_1(x) := x^5$ und

$$f_2(x) := 3 \cdot x + 1$$

Die grafische Darstellung läßt eine Einschreibung der Nullstellen die Intervalle

$x_1^* \in [-1.5, -1]$, $x_2^* \in [-0.5, 0]$ und $x_3^* \in [1, 1.5]$ zu.

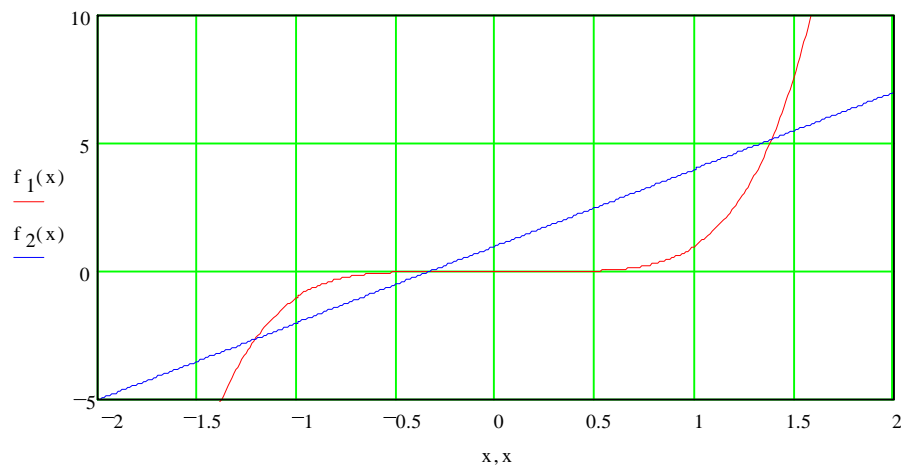


Abb. 3: Grafisches Lokalisieren mit MathCad

2.3 Bisektionsverfahren - Intervallhalbierungsmethode

2.3.1 Beschreibung

Das Bisektionsverfahren baut auf den aus der Analysis bekannten Satz von BOLZANO⁴ über die Existenz einer Nullstelle einer Funktion auf. Dieser besagt, daß bei Forderung der Stetigkeit der Funktion $f: [a_0, b_0] \rightarrow \mathbf{R}$ und der Bedingung $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$ immer mindestens ein $x^* \in (a_0, b_0)$ mit $f(x^*) = 0$ existiert. Unter dieser Voraussetzung läßt sich leicht eine Vorschrift ableiten, die das Intervall fortwährend so verkleinert, daß darin eine Nullstelle von $f(x)$ liegt.

⁴ Bernhard Bolzano (1781 - 1848), böhmischer Religionsphilosoph und Mathematiker

Bei der Intervallhalbierungsmethode wird, wie der Name schon sagt, das Intervall in der Mitte geteilt. Aus dem Vorzeichen des Funktionswertes am Mittelpunkt wird geschlossen, in welchem der beiden Teilintervalle sich die gesuchte Nullstelle befindet. Der Mittelpunkt x_1 des Intervalls ergibt sich aus dem Ausgangsintervall $[a_0, b_0]$ durch

$$x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

Ist nun nicht zufälligerweise $f(x_1) = 0$ und x_1 damit die gesuchte Nullstelle, so bestimmt man nun das Teilintervall, indem die Nullstelle liegt. Ist $f(a_0) \cdot f(x_1) < 0$, so liegt die Nullstelle in $[a_0, x_1]$. In diesem Fall wird $a_1 = a_0$ und $b_1 = x_0$ gesetzt. Gilt jedoch $f(a_0) \cdot f(x_1) > 0$, so liegt die Nullstelle in $[x_1, b_0]$. Damit wird $a_1 = x_0$ und $b_1 = b_0$ gesetzt. Anschließend berechnet man den Mittelpunkt des neuen Intervalls $[a_1, b_1]$ mit

$$x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

und bestimmt analog $[a_2, b_2]$. Nach k Schritten ist eine Nullstelle im Intervall $[a_k, b_k]$ eingeschlossen. Dieses hat die Länge $|b_k - a_k| = 2^{-k} |b_0 - a_0|$.

Das Verfahren wird solange fortgesetzt, bis entweder $f(x_k) = 0$ oder das Intervall „klein genug“ ist. Dies könnte sein, wenn

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon \tag{1}$$

gilt, wobei ε eine vorgegebene Größe sein muß. Man spricht in diesem Fall von der absoluten Abweichung zweier aufeinanderfolgender Näherungswerte. Eine andere Variante ist zu prüfen, ob der Funktionswert genügend klein ist, d. h. ob

$$|f(x_k)| < \varepsilon \tag{2}$$

gilt. Natürlich kann die Methode abgebrochen werden, wenn eine vorgegebene Schrittzahl erreicht ist, d. h. wenn

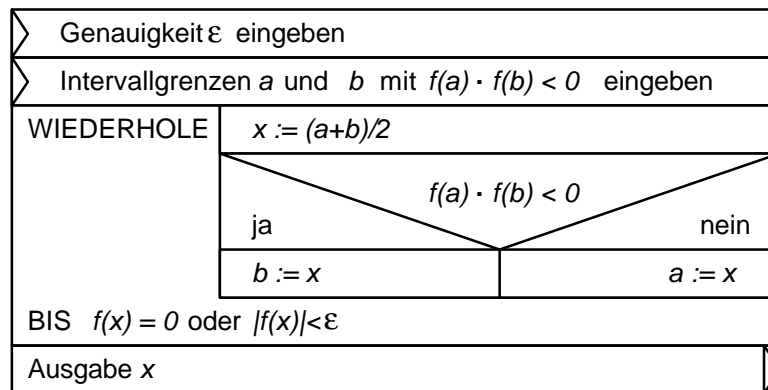
$$k \geq n \tag{3}$$

gilt. Die Vorschriften (1), (2) und (3) heißen **Abbruchkriterien**.

Die Intervallhalbierungsmethode kann natürlich auch zur Bestimmung von Nullstellen genutzt werden. Allerdings sind hierfür viele Schritte erforderlich, um hinreichend genaue Angaben machen zu können. Deshalb wird die Methode nur zur groben Annäherung an die Nullstelle genutzt.

2.3.2 Programmierung

Die Bisektionsmethode ist relativ einfach zu programmieren. Als Abbruchkriterium wurde die Variante $|f(x_k)| < \varepsilon$ ausgewählt. Eine Kontrolle der Eingangsbedingung $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$ erfolgt nicht. Das folgenden Struktogramm soll den Ablauf verdeutlichen:



Struktogramm 1: Das Bisektionsverfahren

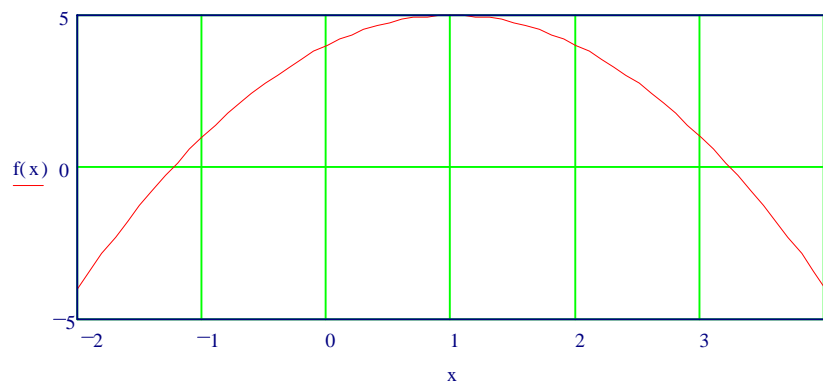
2.3.3 Visualisierung mittels MathCad

Leider läßt das Programm MathCad 3.1 keine Programmierung zu, so daß die Intervallhalbierungsmethode für jeden Schritt erneut eingegeben werden muß. Das folgende Beispiel ist in der Datei „BISECT.MCD“ gespeichert und stellt eine mögliche Visualisierung dar. Es wurden zur Verkürzung der Darstellung allerdings nur 4 Halbierungsschritte durchgeführt.

Beispiel 3:

Gegeben sei die Funktion: $f(x) := 5 - (x - 1)^2$ Definitionsbereich: $x := -2, -1.9 \dots 4$

Die grafische Darstellung der Funktion liefert:

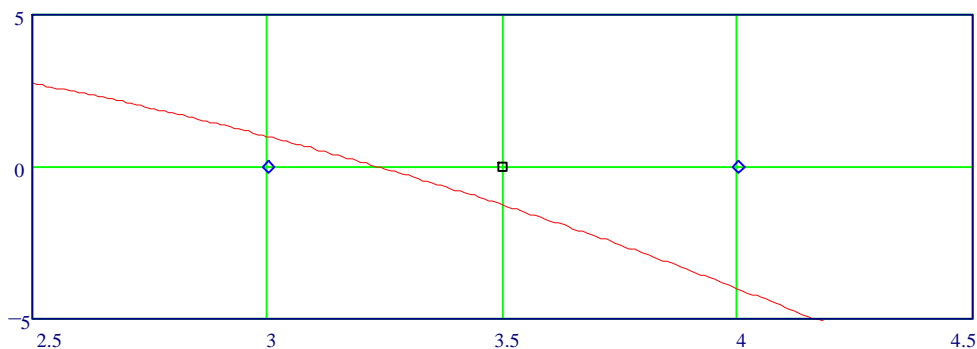


Führen nun das Bisektionsverfahren aus, um die positive Nullstelle zu lokalisieren. Dazu werden zuerst die Intervallgrenzen a_0 und b_0 eingegeben.

$$a_0 := 3 \quad b_0 := 4$$

Es erfolgt die Bestimmung des Mittelpunktes z des Intervalls: $z := \frac{a_0 + b_0}{2} \quad z = 3.5$

Die grafische Darstellung zeigt die beiden Intervallgrenzen sowie den Mittelpunkt:



Bestimmen zuerst den Funktionswert an der Stelle z und prüfen die Abbruchbedingung

$$|f(z)| < \epsilon:$$

$$|f(z)| = 1.25 \text{ ist größer als } \epsilon = 0.01$$

Da Bedingung noch nicht erfüllt ist, erfolgt die Bestimmung der neuen Intervallgrenzen:

$$a_0 := \text{wenn}(f(z) \cdot f(a_0) < 0, a_0, z)$$

$$b_0 := \text{wenn}(f(z) \cdot f(b_0) < 0, z, b_0)$$

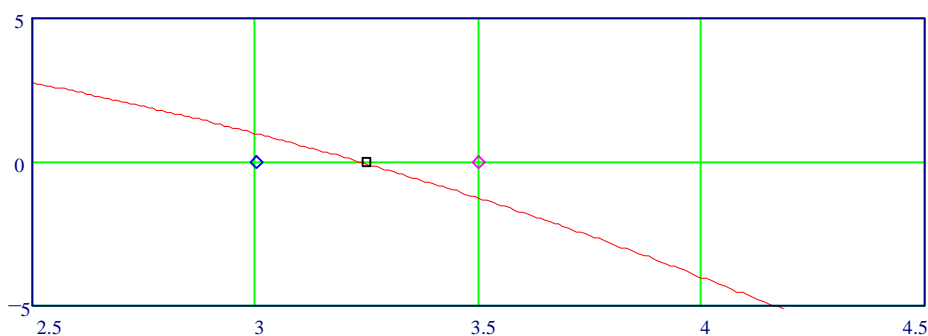
$$a_0 = 3$$

$$b_0 = 3.5$$

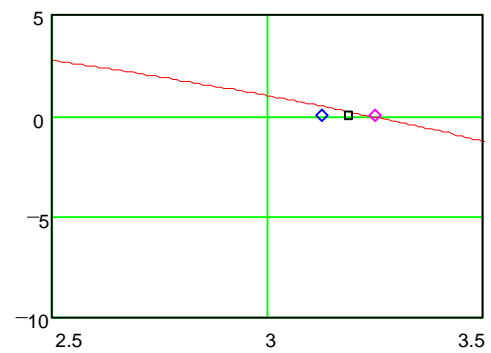
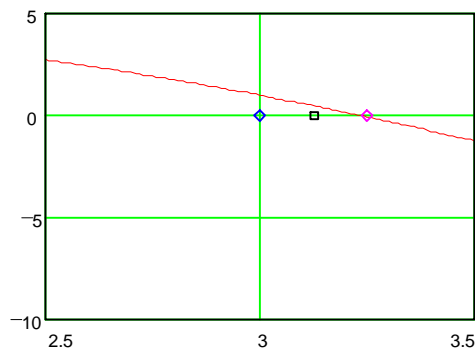
Bestimmung der neuen Zwischenstelle und des zugehörigen Funktionswertes:

$$z := \frac{a_0 + b_0}{2} \quad z = 3.25 \quad f(z) = -0.063$$

Die grafische Darstellung ist dann diese:



Die Fortsetzung dieser Schrittfolge liefert schließlich die folgenden zwei graphischen Darstellungen.



2.3.4 Darstellung mittels DERIVE

Die Visualisierung des Bisektionsverfahren mit DERIVE soll in drei Stufen erfolgen. In der ersten Stufe berechnet das Programm nach Eingabe der Grenzen des gegebenen Intervalls den zugehörigen Mittelpunkt und die Funktionswerte an den Intervallgrenzen sowie am Mittelpunkt. Dazu wurde eine Matrix der Gestalt

$$\begin{bmatrix} \text{" a" } & \text{" m" } & \text{" b" } \\ a & \frac{a + b}{2} & b \\ \text{" f(a) " } & \text{" f(m) " } & \text{" f(b) " } \\ f(a) & f\left(\frac{a + b}{2}\right) & f(b) \end{bmatrix}$$

definiert. Die erste und dritte Zeile gibt den in Klammern stehenden Text aus. In der zweiten Zeile werden die Intervallgrenzen sowie der berechnete Mittelpunkt ausgegeben. Die letzte Zeile berechnet den jeweiligen Funktionswert. Der Anwender entscheidet nun selbst, welches der beiden Teilintervalle im weiteren betrachtet werden muß.

Beispiel 4:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2 - 3$. Die Funktion besitzt im Intervall $x \in [1, 2]$ eine Nullstelle, die mittels Intervallschachtelung lokalisiert werden soll. Unter Verwendung der Datei „BISECT_1.MTH“ erhält man folgenden Ablauf:

- ◆ "Die Funktion ist gegeben durch:"
- ◆ $f(x) := x^2 - 3$
- ◆ "Die Intervallgrenzen sind:"
- ◆ $a := 1$
- ◆ $b := 2$
- ◆ "Damit ergibt sich die Matrix zu:"

$$\diamond \begin{bmatrix} a & m & b \\ 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ f(a) & f(m) & f(b) \\ -2 & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

♦ "Damit wird die neue Intervallgrenze:"

$$\diamond a := \frac{3}{2}$$

♦ "Eine weitere Berechnung ergibt:"

$$\diamond \begin{bmatrix} a & m & b \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{4} & 2 \\ f(a) & f(m) & f(b) \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{16} & 1 \end{bmatrix}$$

♦ "etc."

Nach Durchführung dieser zwei Schritte muß sich die gesuchte Nullstelle innerhalb des Intervalls $x_0 \in \left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right]$ befinden. □

In der zweiten Stufe wird dem Anwender die Entscheidung der Auswahl des Teilintervalls abgenommen. Dazu wird die Funktion

$$\text{BISECT_AUX}(u, x, a, b, c) := \text{IF} \left(\lim_{x \rightarrow a} u \cdot \lim_{x \rightarrow c} u < 0, [a, c], [c, d] \right)^5$$

in DERIVE definiert. Diese prüft, ob das Produkt der Funktionswerte der Funktion $u(x) = f(x)$ an der ersten Intervallgrenze a und der Mittelpunktsstelle c kleiner als Null ist, und legt das neue Intervall dem Verfahren entsprechend an. Im Anschluß wird der neue Mittelpunkt bestimmt und das Verfahren wiederholt, bis die erforderliche Schrittzahl erreicht ist. Auch dieser Schritt läßt sich in DERIVE mit der Funktion

$$\text{BISECT}(u, x, a, b, n) := \text{ITERATES}[\text{BISECT_AUX} \dots \left(u, x, \text{ELEMENT}(v, 1), \text{ELEMENT}(v, 2), \frac{\text{ELEMENT}(v, 1) + \text{ELEMENT}(v, 2)}{2} \right), v, [a, b], n]$$

durchführen. Das Ergebnis des Programms ist eine Liste der betrachteten Intervalle.

⁵ Die definierte Funktion berechnet den Funktionswert $u(a)$ über den Grenzwert. Diese Vorgehensweise ist aus programmtechnischen Gründen günstig und wird in allen weiteren DERIVE-Sitzungen genutzt.

Beispiel 5:

Gegeben sei die Funktion $u(x) = x^3 + 5 \cdot x^2 + 2$. Die Funktion besitzt im Intervall $x \in [0, 1]$ eine Nullstelle, die mittels Intervallschachtelung in fünf Schritten lokalisiert werden soll. Unter Verwendung der Datei „BISECT_2.MTH“ erhält man folgenden Ablauf:

- ◆ "Gegeben ist die Funktion $u(x) = x^3 + 5 \cdot x^2 + 2$ "
 - ◆ "Starten das Verfahren in den Grenzen $[0, 1]$ mit 5 Schritten"
 - ◆ `BISECT(x3 - 5·x2 + 2, x, 0, 1, 5)`
 - ◆ "Die Approximation liefert die Matrix:"
- $$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0.75 \\ 0.625 & 0.75 \\ 0.625 & 0.6875 \\ 0.625625 & 0.6875 \end{bmatrix} \quad \text{□}$$

Die dritte Stufe baut unmittelbar auf die zweite auf. Es wird die erhaltene Liste in grafisch darstellbare Intervalle umgewandelt und schließlich gezeichnet. Die dazu notwendige Funktion lautet:

`PUNKTE(matrix):= ...`

$$\dots \text{VECTOR} \left[\left[\begin{array}{c} \text{ELEMENT}(matrix,i,1) \frac{\text{DIMENSION}(matrix) - i}{100} \\ \text{ELEMENT}(matrix,i,2) \frac{\text{DIMENSION}(matrix) - i}{100} \end{array} \right], i, 1, \text{DIMENSION}(matrix) \right]$$

Sie erzeugt einen Vektor von 2×2 Matrizen, die jeweils den Start- und Endpunkt eines Intervalls bezeichnen. Damit die Intervalle in der Grafik nicht übereinander gezeichnet werden, erfolgt eine Aufspaltung der Intervalle, wobei das kleinste unmittelbar auf der Abszisse gezeichnet wird und die anderen darüber.

Beispiel 6:

Gegeben sei die Funktion $u(x) = 2^x - 4 \cdot x$. Die Funktion besitzt im Intervall $x \in [0, 1]$ eine Nullstelle, die mittels Intervallschachtelung in sechs Schritten grafisch lokalisiert werden soll. Unter Verwendung der Datei „BISECT_3.MTH“ erhält man folgenden Ablauf:

```

♦ "Gegeben ist die Funktion u(x) = 2^x - 4x"
♦ U(x) := 2^x - 4·x
♦ BISECT(2^x - 4·x, x, 0, 1, 6)
  [ 0      1 ]
  [ 0      0.5 ]
  [ 0.25   0.5 ]
♦ [ 0.25   0.375 ]
  [ 0.25   0.3125 ]
  [ 0.28125 0.3125 ]
  [ 0.296875 0.3125 ]
♦ PUNKTE(matrix)
♦ "Gegeben ist die Funktion u(x) = x^3 + 5·x^2 + 2"
♦ "Starten das Verfahren in den Grenzen [0, 1] mit 5 Schritten"
♦ BISECT(x^3 - 5·x^2 + 2, x, 0, 1, 5)
♦ "Die Approximation liefert die Matrix:"
  [ 0      1 ]
  [ 0.5    1 ]
♦ matrix:= [ 0.5    0.75 ]
  [ 0.625  0.75 ]
  [ 0.625  0.6875 ]
  [ 0.625625 0.6875 ]
♦ PUNKTE(matrix)
♦ [[ [0 0.06] [0 0.05] [0.25 0.04] [0.25 0.03] [0.25 0.02] [0.28125 0.01] [0.296875 0] ]
  [ [1 0.06] [0.5 0.05] [0.5 0.04] [0.375 0.03] [0.3125 0.02] [0.3125 0.01] [0.3125 0] ] ]

```

Die grafische Darstellung ergibt:

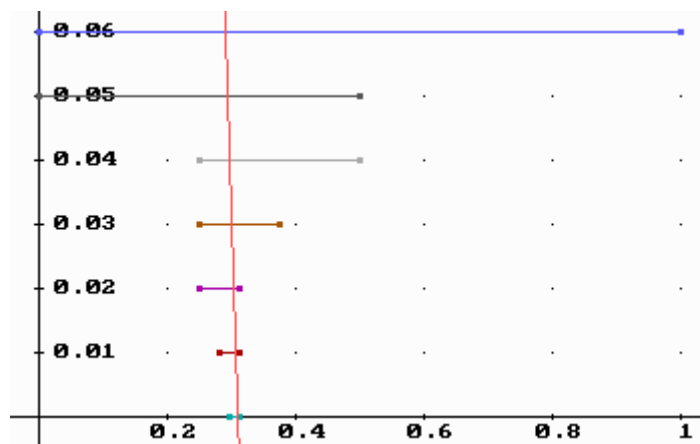


Abb. 4: Visualisierung des Bisektionsverfahrens mittels DERIVE. Die gegebene Funktion $u(x)$ liefert den roten Graphen. Damit sich die farblich markierten Intervalle nicht überdecken, wurden sie in Abständen dargestellt.

3 Iterationsverfahren

3.1 Vorbemerkungen

Betrachtet wird nun wieder das Problem des Lösens der Gleichung

$$f(x) = 0 \quad (4)$$

für eine in einem Intervall $[a, b]$ gegebene reelle Funktion $f(x)$ mit einer reellen Veränderlichen x . Da das direkte Lösen von (4) nicht möglich ist, bringt man die Gleichung auf die Form

$$x = g(x). \quad (5)$$

Dies kann z. B. durch Auflösen der Gleichung $f(x) = 0$ nach x geschehen. Dieses „herausziehen“ eines x kann bei einer Funktion $f(x)$ zu verschiedene $g(x)$ führen.

Beispiel 7:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^5 - 3x + 1 = 0$. Mögliche Umformungen sind:

$$a) \quad x = \frac{x^5 + 1}{3}$$

$$b) \quad x = \sqrt[4]{3 - \frac{1}{x}}, \quad x < 0 \text{ oder } x \geq \frac{1}{3}$$

$$c) \quad x = \frac{3x - 1}{x^4}, \quad x \neq 0$$

$$d) \quad x = \sqrt[5]{3x - 1}$$

Den Ausdruck (5) kann man sich einfach grafisch veranschaulichen. Dazu werden in ein Koordinatensystem die beiden Graphen $f_1(x) = x$ und $f_2(x) = g(x)$ im Intervall $[a, b]$ gezeichnet. Die Gleichung $x = g(x)$ ist genau im Schnittpunkt der Graphen erfüllt.

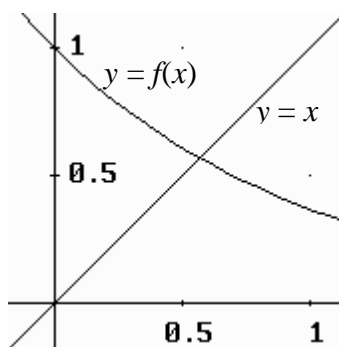


Abb. 5: Graphische Deutung der Gleichung $x = g(x)$

Der die Gleichung $x = g(x)$ erfüllende Abszissenwert x^* heißt **Fixpunkt von $g(x)$** . Es gilt also $x^* = g(x^*)$. Die Funktion $g(x)$ kann auch mehrere Fixpunkte besitzen. Bei der äquivalent Umformung von $f(x) = 0$ zu $x = g(x)$ werden aus den Nullstellen von $f(x)$ die

Fixpunkte von $g(x)$. Ist die Umformung nicht äquivalent, z. B. Wurzelziehen und Quadrieren, so können Fixpunkte verloren gehen.

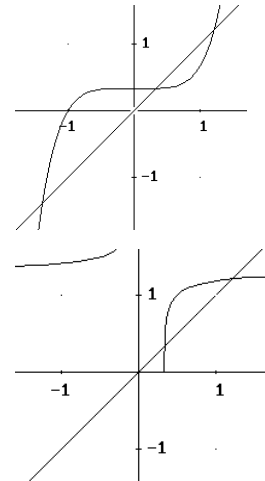
Beispiel 8:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^5 - 3x + 1 = 0$. Die Umformungen

a) $x = \frac{x^5 + 1}{3}$ liefert drei Fixpunkte

b) $x = \sqrt[4]{3 - \frac{1}{x}}$, $x < 0$ oder $x \geq \frac{1}{3}$

liefert zwei Fixpunkte



3.2 Allgemeine Iteration - Sukzessive Approximation

3.2.1 Mathematische Beschreibung

Das Iterationsverfahren besteht aus einer Vorschrift

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

die mit Hilfe eines Startwertes $x_0 \in [a, b]$ eine Zahlenfolge $\{x_k\} \subset [a, b]$ liefert, wenn die Funktion $g(x)$ das Intervall $[a, b]$ in sich abbildet. Gesucht werden dabei solche Iterationsvorschriften, bei denen die erhaltene Folge gegen den Fixpunkt von $g(x)$ konvergiert.

Das heißt, man tastet sich ausgehend von einem Startwert x_0 schrittweise an den Fixpunkt heran und zwar so, daß sich das neue Argument x_{k+1} der Funktion g aus dem Funktionswert des alten Argumentes x_k ergibt.

Beispiel 9:

Sei $f(x) = \frac{1}{2} \ln x + 2x - 2$, mit $0,5 \leq x \leq 1,5$. Eine Umformung ergibt

$$g(x) = 1 - \frac{1}{4} \ln x \text{ und damit das Iterationsverfahren zu}$$

$$x_{k+1} = 1 - \frac{1}{4} \ln x_k \quad k = 0, 1, \dots \text{ Der Startwert sei } x_0 = 0,8.$$

k	x_k	k	x_k
0	0,8	6	0,9999466978
1	1,055785888	7	1,000013326
2	0,9864286483	8	0,9999966685
3	1,0034116071	9	1,000000833
4	0,9991474376	10	0,9999997918
5	1,000213232	11	1,000000052

Tab. 1: Näherungswerte

Bei Fortsetzung der Iteration ergibt sich der Fixpunkt $x^* = 1$, d. h. die Funktion $f(x)$ hat ihre Nullstelle bei $x = 1$. Die Probe bestätigt diese Aussage.

Das eigentliche Problem ist aber, eine Iterationsvorschrift zu finden, bei der die erhaltene Zahlenfolge gegen den Fixpunkt von $g(x)$ konvergiert. Um dafür ein Kriterium zu bestimmen, betrachtet man zunächst den Fehler der iterierten Werte und den Faktor der Fehlerverkleinerung q . Dieser wird auch als **Konvergenzfaktor q** mit

$$|x_{k+1} - x^*| \leq q |x_k - x^*|, \quad \text{mit } 0 \leq q < 1$$

bezeichnet. Für das Beispiel 9 ergibt sich mit Kenntnis des Fixpunktes $x^* = 1$ folgende Tabelle:

k	$ x_k - x^* $	$\frac{ x_k - x^* }{ x_{k+1} - x^* }$ (gerundet)	k	$ x_k - x^* $	$\frac{ x_k - x^* }{ x_{k+1} - x^* }$ (gerundet)
0	0,2		6	0,000053302	4,00045
1	0,055785888	3,58514	7	0,000013326	3,99985
2	0,013571351	4,11056	8	0,000003331	4,00060
3	0,0034116071	3,97799	9	0,000000833	3,99880
4	0,000852562	4,00159	10	0,000000208	4,00481
5	0,000213232	3,99828	11	0,000000052	4,00000

Tab. 2: Fehlverhalten für iterierte Werte aus Beispiel 9

Man erkennt, daß für die Fehlerwerte nach Tab. 1 von Schritt zu Schritt annähernd eine Verteilung eintritt. Für die Iterationsformel

$$x_{k+1} = 1 - \frac{1}{4} \ln x_k \quad k = 0, 1, \dots$$

ist also in diesem Beispiel der Konvergenzfaktor $q \approx \frac{1}{4}$. Je kleiner das q ist, desto besser oder schneller konvergiert das Verfahren, desto höher ist seine **Konvergenzgeschwindigkeit**.

Da der neue Restfehler nach einem Iterationsschritt linear vom alten Fehler abhängt, spricht man auch von linearer Konvergenz. Noch besser als diese lineare Konvergenz ist aber, wenn der neue Fehler quadratisch bzw. noch stärker vom alten Fehler abhängt, also

$$\varepsilon_{k+1} \leq q \varepsilon_k^p \quad \text{mit } p > 1.$$

Die Kenngröße p heißt **Konvergenzordnung**.

Trotz dieser Feststellungen zur Konvergenz eines Iterationsverfahrens ist noch nicht deutlich geworden, wie die Konvergenz gesichert werden kann! Um darüber Aussagen treffen zu können, betrachte man folgendes Beispiel.

Beispiel 10:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = a \ln x + b x + c = 0$. Daraus leitet man die iterierfähige Form

$$x = -\frac{a \ln x + c}{b} \equiv g(x)$$

her. Durch die Wahl zweier verschiedener Parameterkombinationen (a, b, c) erhält man die Aufgaben:

1. Aufgabe

$$a = 0,125$$

$$b = 2$$

$$c = -2$$

2. Aufgabe

$$a = 5$$

$$b = 2$$

$$c = -2$$

Diese Parameter wurden gewählt, damit in beiden Fällen die Lösung $x^* = 1$ existiert, wovon man sich leicht durch Einsetzen überzeugen kann.

Die beiden Iterationsvorschriften lauten

1. $x := 1 - 0,0625 \ln x$

2. $x := 1 - 2,5 \ln x$.

Damit ergeben sich für den Startwert $x_0 = 2$ folgende Rechenwerte:

k_i	x_k für Fall 1	x_k für Fall 2
0	2	2
1	0,9566783012	-0,732867951
2	1,002768006	
3	0,9998272386	
4	1,000010799	
5	0,9999993251	
6	1,000000042	
7	0,9999999974	
8	1,0	
9	1,0	

Im Fall 1 wird der Fixpunkt erreicht, im Fall 2 versagt die Iteration im zweiten Schritt, da der Definitionsbereich von $g(x)$ verlassen wird. Das heißt jedoch nicht, daß kein Fixpunkt existiert, denn ein Einsetzen von $x^* = 1$ in die Iterationsformel ergibt wieder $x^* = 1$. Der durch die Formel beschriebene Iterationsvorgang ist nicht konvergent.

Wie läßt sich dieses Ergebnis erklären? Unter Verwendung der Abb. 6 erkennt man in Form einer Plausibilitätsbetrachtung:

- a) Beim Fixpunkt x^* und in dessen Umgebung gilt $0 < g'(x) < 1$, d. h., der Kurvenanstieg ist kleiner als 45° . Der Fixpunkt ist anziehend, gleichgültig, ob der Startwert x_0 kleiner oder größer als der Fixpunkt ist. Die Konvergenz erfolgt monoton von links bzw. rechts.
- b) Beim Fixpunkt x^* und in dessen Umgebung gilt $1 < g'(x)$, d. h., der Kurvenanstieg ist größer als 45° . Der Fixpunkt ist nach beiden Seiten abstoßend. Die iterierten Werte x_k divergieren.
- c) Beim Fixpunkt x^* und in dessen Umgebung gilt $-1 < g'(x) < 0$, d. h., der Kurvenabfall ist kleiner als 45° . Der Fixpunkt ist anziehend. Die Konvergenz erfolgt alternierend.

d) Beim Fixpunkt x^* und in dessen Umgebung gilt $g'(x) < -1$, d. h., der Kurvenabfall ist größer als 45° . Der Fixpunkt ist alternierend abstoßend. Die iterierten Werte x_k divergieren.

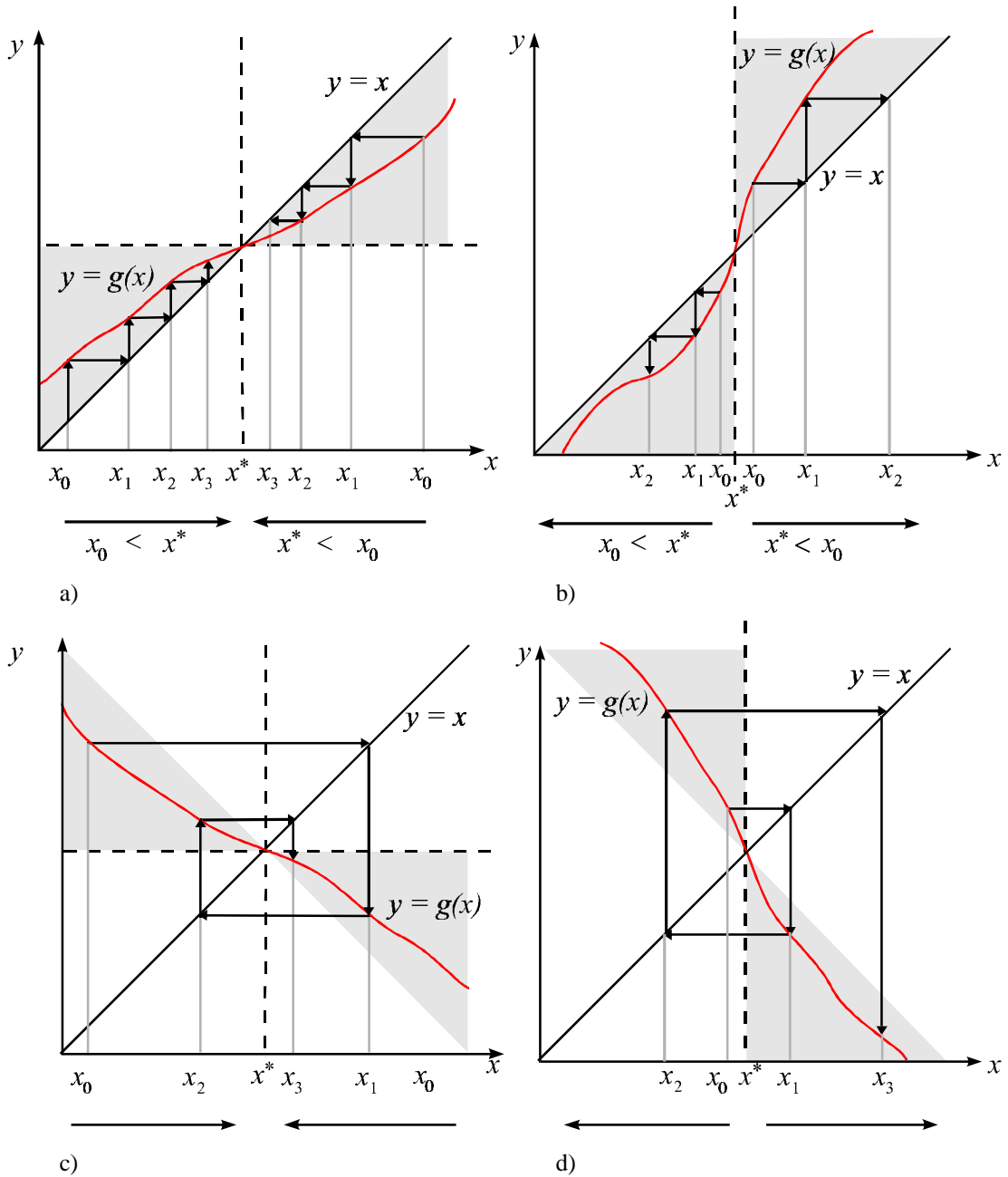


Abb. 6: Der Fixpunkt x^* einer Iterationsformel $x = g(x)$ ist als Schnittpunkt von $y = x$ und $y = g(x)$ dargestellt. Das dynamische Verhalten der Iterationsformel kommt durch das Projizieren von $(x_k, g(x_k))$ auf die Gerade $y = x$ zum Ausdruck, dann ist $x_{k+1} = g(x_k)$.

Also läßt sich ableiten, daß der Anstieg, d. h. die Ableitung der Funktion $g(x)$ beim Fixpunkt und in dessen Umgebung für die Iterationskonvergenz bedeutsam ist. Ein

anziehender Fixpunkt (eine kontraktive, d. h. zusammenziehende Abbildung oder konvergente Iterationsformel) liegt vor, wenn

$$|g'(x)| \leq q < 1 \quad (6)$$

beim Fixpunkt und in dessen Umgebung gilt und der Startwert aus dieser Umgebung genommen wird. Das heißt, daß $|g'(x)|$ beschränkt und diese Schranke kleiner als 1 sein muß. Mit q wird der Konvergenzfaktor des Verfahrens bezeichnet.

Läßt sich diese aus der geometrischen Veranschaulichung gefundene Konvergenzbedingung auch mathematisch exakt zeigen? Dazu benötigt man folgende Begriffe und Sätze.

Man sagt, eine Funktion $g(x)$ genügt in einem Intervall $[a, b]$ einer **Lipschitzbedingung**⁶, wenn es eine Konstante $q \geq 0$ derart gibt, daß für alle $x, y \in [a, b]$

$$|g(x) - g(y)| \leq q |x - y|$$

gilt. Die Konstante q heißt **Lipschitzkonstante** von $g(x)$ in $[a, b]$.

Offenbar ist mit q auch jede Zahl größer als q Lipschitzkonstante. Eine Funktion $g(x)$, die die Lipschitzbedingung erfüllt, ist in diesem Intervall auch stetig und heißt **lipschitzstetig** in $[a, b]$.

Die Ermittlung der Lipschitzkonstanten ist im allgemeinen schwierig. Es gilt jedoch folgender Satz.

Ist $g(x)$ in $[a, b]$ stetig differenzierbar, so erfüllt $g(x)$ dort eine Lipschitzbedingung mit

$$q = \max_{x \in [a, b]} |g'(x)|.$$

Beweis:

Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt für jedes $x, y \in [a, b]$

$$|g(x) - g(y)| = |g'(\xi)(x - y)|, \quad \xi \in (a, b),$$

$$|g(x) - g(y)| = |g'(x)| |x - y|,$$

$$|g(x) - g(y)| \leq \max_{x \in [a, b]} |g'(x)| |x - y|.$$

□

⁶ Rudolf Lipschitz (1832 - 1903), deutscher Mathematiker

Besonders wichtig für Iterationsverfahren sind Funktionen $g(x)$, die in einem Intervall $[a, b]$ eine Lipschitzbedingung mit einer Lipschitzkonstanten $q < 1$ erfüllen. Solche Funktionen werden kontraktiv in $[a, b]$ genannt.

Somit wird damit die aus der geometrischen Veranschaulichung gewonnene Konvergenzbedingung (6) durch die schwächere Lipschitzbedingung

$$|g(x) - g(y)| \leq q |x - y| \quad \text{mit } q < 1$$

ersetzt. Das bedeutet speziell, daß nicht die Ableitung, sondern der Differenzenquotient oder, anschaulich geometrisch, nicht der Anstieg der Tangenten, sondern der der Sehnen beschränkt sein muß.

Damit sind alle Bedingungen für den entscheidenden Satz über das Verfahren der sukzessiven Approximation formuliert.

Banachsche Fixpunktsatz⁷.

Bildet eine Funktion $g(x)$ das Intervall $[a, b]$ in sich ab und ist sie dort kontraktiv, so konvergiert die durch $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, \dots$, erhaltenen Folge für jeden beliebigen Startpunkt $x_0 \in [a, b]$ gegen den eindeutig bestimmten Fixpunkt x^* von $g(x)$ in $[a, b]$.

Beweis:

Der Beweis erfolgt gemäß [1] in vier Teilschritten.

(1) Da $g(x)$ in $[a, b]$ kontraktiv ist und dieses Intervall in sich abbildet, gilt

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - x_k| &= |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq q |x_k - x_{k-1}| \\ &\leq q^2 |x_{k-1} - x_{k-2}| \leq \dots \leq q^k |x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

(2) Für $m > k$ erhält man

$$\begin{aligned} |x_m - x_k| &= |(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \dots + (x_{k+1} - x_k)| \\ &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \dots + |x_{k+1} - x_k| \\ &\leq q^{m-k-1} |x_{k+1} - x_k| + q^{m-k-2} |x_{k+1} - x_k| + \dots + |x_{k+1} - x_k| \\ &= (1 + q + q^2 + \dots + q^{m-k-1}) |x_{k+1} - x_k|. \end{aligned}$$

Für Partialsummen der geometrischen Reihe gilt

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{m-k-1} = \frac{1 - q^{m-k}}{1 - q} < \frac{1}{1 - q}.$$

Damit ergibt sich

$$|x_m - x_k| < \frac{1}{1-q} |x_{k+1} - x_k| \leq \frac{q^k}{1-q} |x_1 - x_0|. \quad (7)$$

Da $q < 1$ vorausgesetzt wurde, unterscheiden sich x_m und x_k beliebig wenig, wenn k genügend groß ist. Das heißt, für die Folge x_0, x_1, x_2, \dots ist das CAUCHYSche⁸ Konvergenzkriterium erfüllt. Da $[a, b]$ abgeschlossen ist, liegt der Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}$$

in diesem Intervall.

(3) Für den Grenzwert \bar{x} gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\bar{x} - g(\bar{x})| = |(\bar{x} - x_{k+1}) + (x_{k+1} - g(\bar{x}))| \\ &\leq |\bar{x} - x_{k+1}| + |x_{k+1} - g(\bar{x})| = |\bar{x} - x_{k+1}| + |g(x_k) - g(\bar{x})| \\ &\leq |\bar{x} - x_{k+1}| + q|x_k - \bar{x}|. \end{aligned}$$

Für $k \rightarrow \infty$ streben beide Summanden gegen 0. Daraus folgt

$$|\bar{x} - g(\bar{x})| = 0,$$

d. h. aber, \bar{x} ist ein Fixpunkt von $g(x)$.

(4) \bar{x} ist der einzige Fixpunkt von $g(x)$ in $[a, b]$. Wäre nämlich \hat{x} ein weiterer Fixpunkt mit $\hat{x} \neq \bar{x}$, so wäre

$$|\bar{x} - \hat{x}| = |g(\bar{x}) - g(\hat{x})| \leq q|\bar{x} - \hat{x}|,$$

und das ist ein Widerspruch zu $q < 1$. □

Aus der Ungleichung (7) des Beweises folgen zwei Abschätzungen für den Abbruchfehler nach dem k -tem Schritt für $m \rightarrow \infty$:

a priori⁹: $|x^* - x_k| \leq \frac{q^k}{1-q} |x_1 - x_0|$ (8)

a posteriori¹⁰: $|x^* - x_k| \leq \frac{q}{1-q} |x_k - x_{k-1}|$ bzw. $\varepsilon_k \leq \frac{q}{1-q} d_k$ (9)

⁷ Stefan Banach (1892 - 1945), polnischer Mathematiker

⁸ Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857), französischer Mathematiker

⁹ a priori (lat.) = von vornherein

¹⁰ a posteriori (lat.) = im nachhinein

Die Abschätzung (8) gestattet es, vor Beginn der Rechnung eine Abschätzung durchzuführen und damit zu entscheiden, wie viele Iterationsschritte höchstens notwendig sind, um die entsprechende Genauigkeit des Ergebnisses zu erreichen. Die Abschätzung (9) stützt sich auf die letzten beiden Näherungen und ist in der Regel genauer. In der praktischen Rechnung bricht man deshalb a posteriori ab, d. h., daß während der Rechnung die Differenz $d_k = |x_k - x_{k-1}|$ überwacht wird. Ist nämlich ein bestimmtes ε als zulässiger Restfehler gefordert, so läßt man iterieren, bis die Bedingung

$$\frac{q}{1-q} d_k \leq \varepsilon$$

erfüllt ist, denn dann ist auch $\varepsilon_k \leq \varepsilon$.

Abschließend noch einige Aussagen zur Konvergenzordnung des allgemeinen Iterationsverfahrens. Ist die Funktion $g(x)$ im Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbar, so erhält man bei Anwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x^* &= g(x_k) - g(x^*) = g'(ξ)(x_k - x^*), \\ |x_{k+1} - x^*| &= |g'(ξ)| |x_k - x^*|, \end{aligned} \quad (10)$$

wobei $ξ$ zwischen x_k und x^* liegt. Da für alle Funktionen $g(x)$, die dem Banachschen Fixpunktsatz genügen, $\max_{x \in [a, b]} |g'(x)| < 1$ gilt, beträgt nach (10) die Konvergenzordnung p mindestens 1. Allerdings gibt es auch Fälle, in denen eine höhere Konvergenzordnung p zu erwarten ist. Dazu folgender Satz.

Die Funktion $g(x)$ sei im Intervall $[a, b]$ p -mal stetig differenzierbar. Für die eindeutig bestimmte Lösung $x^* \in [a, b]$ von $g(x)$ gelte

$$\begin{aligned} g'(x^*) &= g''(x^*) = \dots = g^{(p-1)}(x^*) = 0, \\ g^{(p)}(x^*) &\neq 0. \end{aligned}$$

Dann hat das Verfahren der sukzessiven Approximation

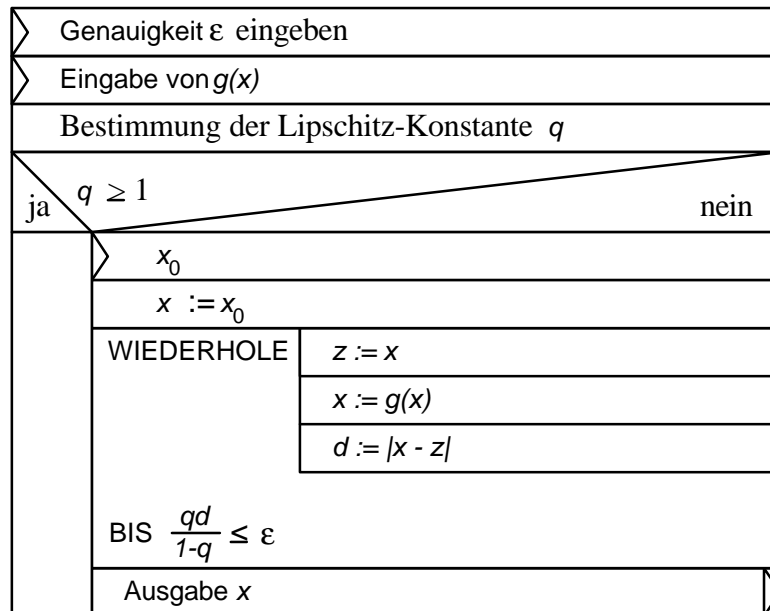
$$x_{k+1} = g(x_k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

die Konvergenzordnung p .

Für den Beweis sei auf [1] verwiesen.

3.2.2 Programmierung

Das folgenden Struktogramm soll den Ablauf verdeutlichen:



Struktogramm 2: Das Allgemeine Iterationsverfahren

3.2.3 Darstellung mittels DERIVE

Der folgende Ausdruck definiert eine Funktion, die an die gegebene 2×2 -Matrix, welche in jeder Position den Startwert enthält, mit jedem Iterationsschritt zwei weitere Zeilen anhängt. Diese neuen Zeilen enthalten außer im ersten Element den iterierten Wert. Im ersten Element steht noch der alte Wert. Dadurch erreicht man beim grafischen Darstellen die typische Visualisierungsfunktion, wie sie auch in der Beispielabbildung zu sehen ist.

$$\text{PUNKTE}(u, x, x_0, n) := \text{APPEND} \left[\text{ITERATES} \left(\lim_{x \rightarrow \text{ELEMENT}(v, 2, 1)} \begin{pmatrix} x & u \\ u & u \end{pmatrix} \right), v, \begin{pmatrix} x_0 & x_0 \\ x_0 & x_0 \end{pmatrix}, n \right].$$

Beispiel 11:

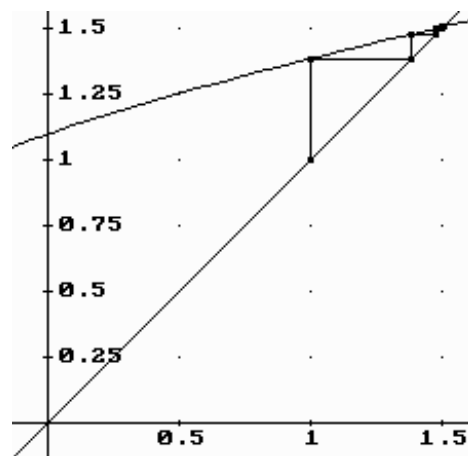
Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^x - x - 3$. Die Funktion besitzt im Intervall $x \in [1, 2]$ eine Nullstelle, die mittels allgemeinem Iterationsverfahren ermittelt werden soll. Unter Verwendung der Datei „APPROX.MTH“ erhält man folgenden Ablauf:

- ◆ "Eine mögliche Funktion $u(x)$ ist:"
- ◆ $u(x) := \ln(x+3)$
- ◆ "Der Startwert sei $x_0 = 1$, die Schrittzahl gleich 4:"

◆ PUNKTE($u(x), x, 1, 4$)

1	1
1	1
1	1.38629
1.38629	1.38629
1.38629	1.47848
1.47848	1.47848
1.47848	1.49928
1.49928	1.49928
1.49928	1.50391
1.50391	1.50391

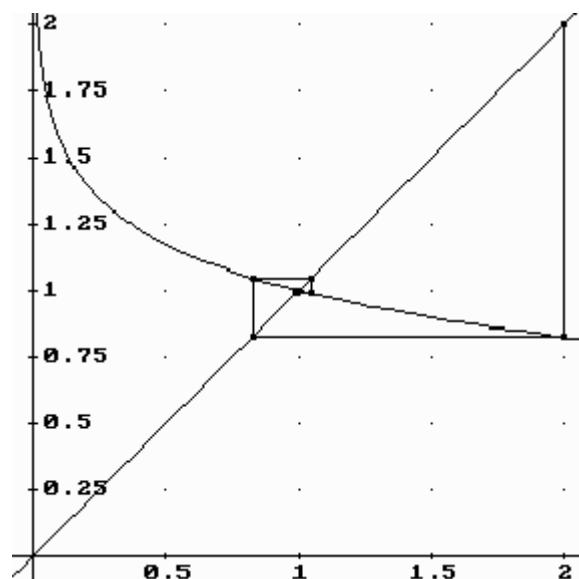
◆ "Damit ergibt sich folgendes Bild:"



Übrigens führt die offensichtlichere Umformung $x = e^x - 3$ aus dem vorgegebenen Intervall $x \in [1, 2]$, d. h., die Lipschitzbedingung ist hier verletzt.

□

Beispiel 12:



Gegeben sei die Funktion $f(x) = \ln x + 4 \cdot x - 4$. Die Funktion besitzt in $x \in (0, 1]$ eine Nullstelle, die mittels allgemeinem Iterationsverfahren ermittelt werden soll. Unter Verwendung der analogen Vorgehensweise wie im Beispiel 11 erhält man obige Abbildung.

3.2.4 Darstellung mittels MAYA

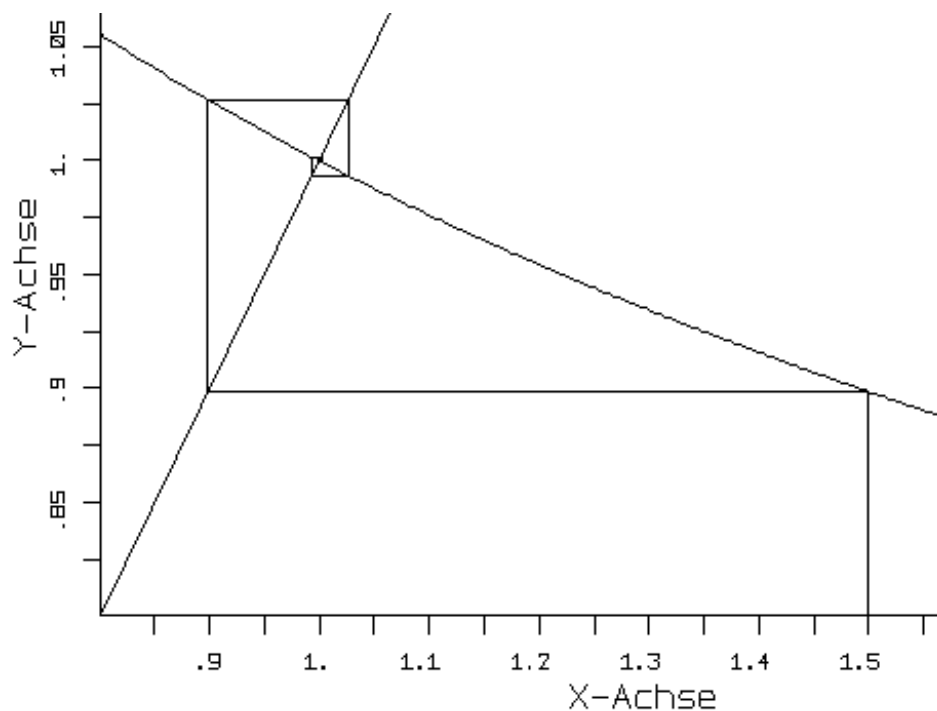
Im Programm MAYA findet man das allgemeine Iterationsverfahren unter dem Punkt Nullstellenbestimmung - Fixpunktiteration.

Beispiel 13:

In die Eingabemaske wird die bereits umgestellte Funktion $g(x)$, der Definitions- und Wertebereich eingegeben. Also

	$G(X) = 1 - 0.25 \cdot \text{LN}(X)$			
X Intervall:			Y Intervall:	
Untergrenze	0.8		Untergrenze	0.80
Obergrenze	1.8		Obergrenze	1.1
	Startwert X_0:	1.5		

Somit erhält man:



3.2.5 Darstellung mittels MathCad

Durch die einfache Bedienung von MathCad läßt sich das allgemeine Iterationsverfahren sehr gut visualisieren (Datei „APPROX.MCD“).

Beispiel 14:

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := \frac{1}{2} \cdot \ln(x) + 2 \cdot x - 2 \text{ mit } x := 0.8, 0.81 \dots 1.6$$

Die in diesem Intervall liegende Nullstelle ist gesucht. Der Startwert sei:

$$x_0 := 1.5$$

Eine geeignete Umstellung der Funktion $f(x)$ ist

$$g(x) := 1 - \frac{1}{4} \cdot \ln(x)$$

Die Iterationsvorschrift für das allgemeine Iterationsverfahren lautet:

$$x_{k+1} = g(x_k) \quad k = 0, 1, \dots$$

Damit beginnt die Iteration mit

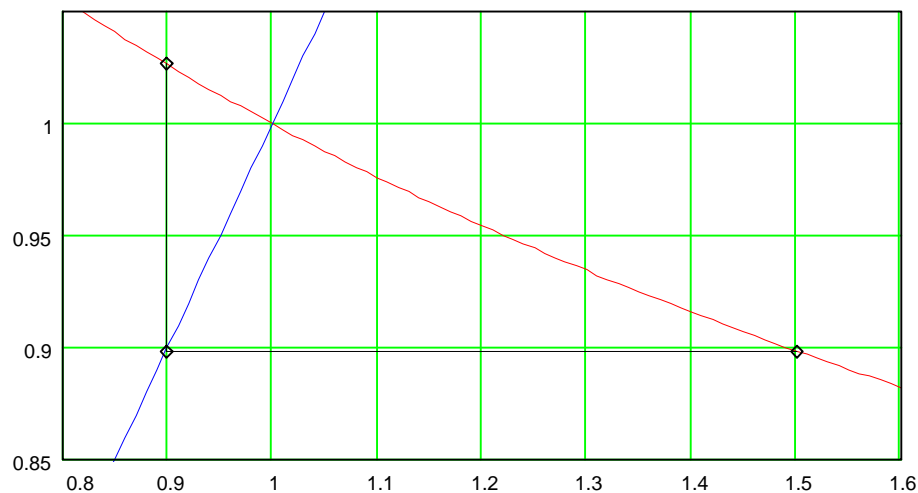
$$x_1 := g(x_0) \quad x_1 = 0.8986 \quad g(x_1) = 1.0267$$

Für die grafische Ausgabe benötigt man die Vektoren w und v , welche die x -Komponenten und y -Komponenten der Geraden senkrecht bzw. parallel zu den Achsen enthält.

$$w := (x_0 \ x_1 \ x_1 \ x_1)^T$$

$$v := (x_1 \ x_1 \ x_1 \ g(x_1))^T$$

$$i := 0 \dots 3 \quad \text{Gleichung der Ursprungsgeraden: } y(x) := x$$



Der nächste Iterationsschritt liefert:

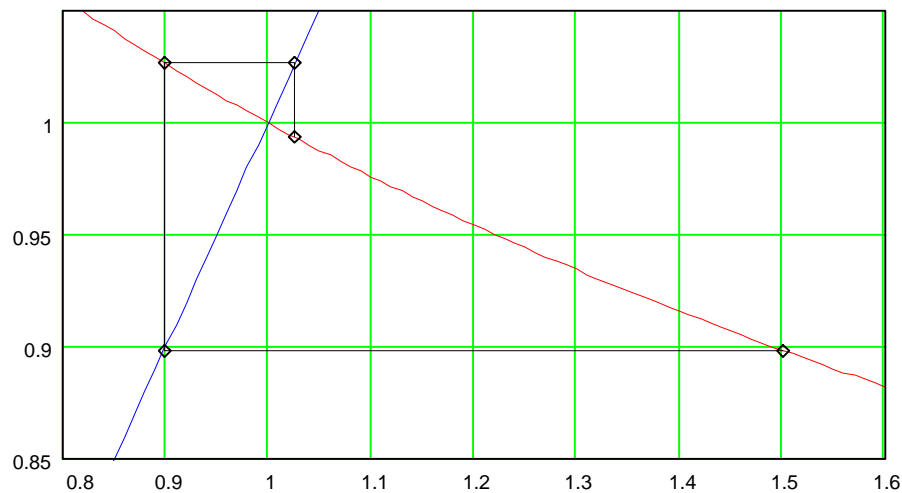
$$x_2 := g(x_1) \quad x_2 = 1.0267 \quad g(x_2) = 0.9934$$

Grafisch heißt das:

$$w := (x_0 \ x_1 \ x_1 \ x_1 \ x_1 \ x_2 \ x_2 \ x_2)^T$$

$$v := (x_1 \ x_1 \ x_1 \ x_2 \ x_2 \ x_2 \ x_2 \ g(x_2))^T$$

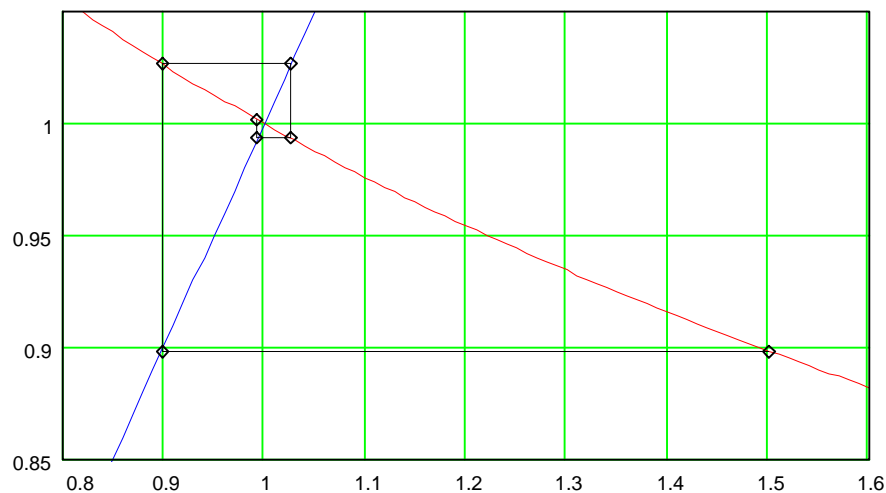
$$i := 0 \dots 7$$



Der dritte Iterationsschritt liefert:

$$x_3 = g(x_2) \quad x_3 = 0.9934 \quad g(x_3) = 1.0017$$

... und grafisch somit:



Die grafische Darstellung des vierten Schrittes liefert kaum neue Informationen. Das Ergebnis der Rechnung liefert die Werte $x_4 = 1.0017$ und $g(x_4) = 0.9996$.

□

3.3 Die Newtonverfahren

3.3.1 Mathematische Beschreibung des klassischen Newtonverfahren

3.3.1.1 Iterationsvorschrift und Iterationsbedingungen

Zur Lösung des Problems $f(x) = 0$ wird die Funktion $f(x)$ in der Umgebung der gesuchten Nullstelle x^* durch eine lineare Funktion ersetzt. Zu einem gewählten Näherungswert x_0 berechnet man den Funktionswert $f(x_0)$ sowie die erste Ableitung $f'(x_0)$ und kann damit

die Gleichung der Tangente im Punkt $P(x_0, y_0)$ an die Kurve $y = f(x)$ angeben

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Über Umformungen ergibt sich die lineare Funktion $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, deren Nullstelle einen verbesserten Näherungswert x_1 für x^* liefert, nämlich

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Damit lautet der unter dem Namen **Newtonverfahren**¹¹ bekannte Algorithmus

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (11)$$

mit den Voraussetzungen, daß $f(x)$ im betrachteten Intervall stetig differenzierbar und $f'(x) \neq 0$ ist. Die Abb. 7 zeigt die geometrische Interpretation des Newtonverfahrens.

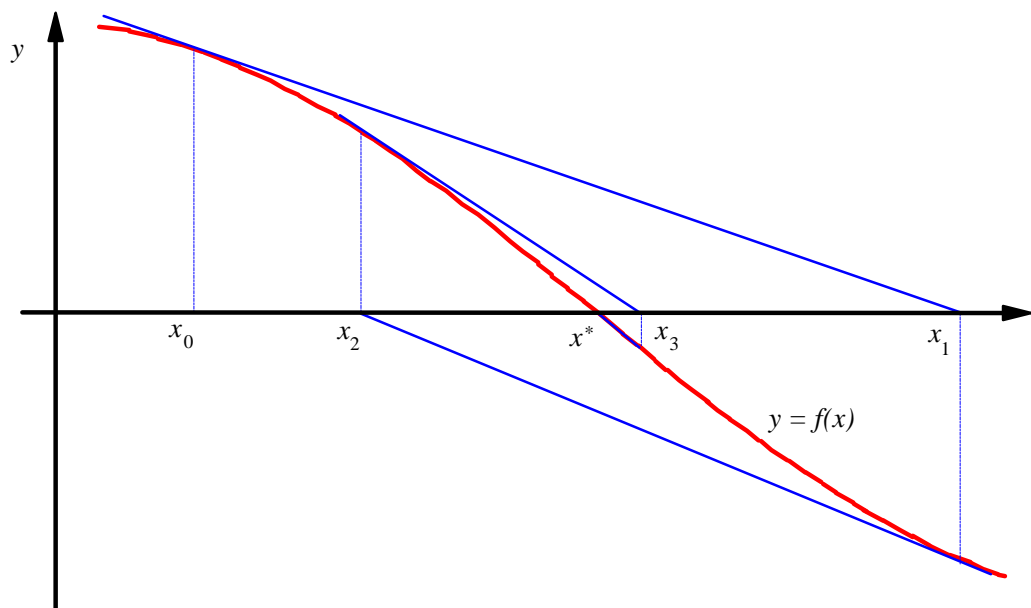


Abb. 7: Das Newtonverfahren

Setzt man übrigens

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

so erkennt man, daß es sich beim Newtonverfahren um einen Spezialfall des Verfahrens der sukzessiven Approximation handelt.

¹¹ Sir Isaac Newton (1643 - 1727), englischer Physiker und Mathematiker

3.3.1.2 Konvergenz des Verfahrens und Konvergenzordnung

Für die Konvergenz des Newtonverfahrens läßt sich folgender Satz angeben.

Ist die Funktion $f(x)$ im Intervall, das eine Nullstelle x^* von $f(x)$ enthält, zweimal stetig differenzierbar und ist dort $f'(x) \neq 0$, so gibt es ein Intervall $I_\Delta = (x^* - \Delta, x^* + \Delta)$ derart, daß für jeden Startwert $x_0 \in I_\Delta$ das Newton-Verfahren gegen x^* konvergiert.

Beweis:

Hierzu setzt man $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ und hat zu zeigen, daß $g(x)$ in I_Δ kontraktiv ist und I_Δ

in sich abbildet. Dann nämlich folgt die Behauptung aus dem Banachschen Fixpunktsatz. Die Ableitung $g'(x)$ ist stetig in I_Δ , und es gilt $f'(x) \neq 0$ in I_Δ . Daher ist $g'(x)$ in I_Δ stetig. Da andererseits $g'(x^*) = 0$ ist, existiert eine Umgebung I_Δ von x^* mit $|g'(x)| < q < 1$ für alle $x \in I_\Delta$, d. h., $g(x)$ ist kontraktiv. Wegen

$$|g(x) - x^*| = |g(x) - g(x^*)| \leq q |x - x^*|$$

bildet $g(x)$ in diesem Fall das Intervall I_Δ in sich ab. □

Der Satz liefert nur eine lokale Konvergenzaussage, da keine Angaben über das Intervall I_Δ getroffen werden. Mit anderen Worten: das Verfahren konvergiert, wenn der Startwert x_0 nahe genug an der zu bestimmenden Nullstelle liegt. Um den Startwert zu bestimmen, verwendet man ein Verfahren zur Lokalisierung der Nullstelle.

Die Frage nach der Konvergenzordnung läßt sich einfach beantworten. Dazu verwendet man den im Abschnitt 3.2.1 angegebenen Satz über die Konvergenzordnung und setzt

$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Unter der Voraussetzung der dreifach stetigen Differenzierbarkeit von

$f(x)$, erhält man

$$g(x^*) = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)} = x^*,$$

$$g'(x^*) = \frac{f''(x^*)f(x^*)}{f'(x^*)^2} = 0,$$

$$g''(x^*) = \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \neq 0 \text{ im allgemeinen.}$$

Das heißt, die Konvergenzordnung ist mindestens gleich 2.

Beispiel 15:

Sei $f(x) = \frac{1}{2} \ln x + 2x - 2$, mit $0,5 \leq x \leq 1,5$. Das Newtonverfahren ergibt

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\frac{1}{2} \ln x_k + 2x_k - 2}{\frac{1}{2x_k} + 2} \quad k = 0, 1, \dots \text{ Der Startwert sei } x_0 = 0,8.$$

k	x_k
0	0,8
1	0,994884486
2	0,9999973679
3	1

Tab. 3: Näherungswerte

Bereits nach dem dritten Schritt ergibt sich der Fixpunkt der Iteration. Der Vergleich mit dem allgemeinen Iterationsverfahren (Tab. 1) zeigt hier eine wesentlich schnellere Annäherung an den Fixpunkt, wie es wegen der höheren Konvergenzordnung des Newtonverfahren auch zu erwarten war. \square

3.3.1.3 Fehlerabschätzungen

Gesucht sind nun die a-priori- und a-posteriori-Fehlerabschätzungen für das Newtonverfahren.

Für die vorgegebene Gleichung $f(x) = 0$ liege die gesuchte Lösung x^* im Intervall $[a, b]$, und für alle $x \in [a, b]$ sei $|f'(x)| \geq m > 0$, $|f''(x)| \leq M$.

Man entwickelt nun $f(x)$ an der Stelle x_k mittels der Taylorschen Formel¹²:

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_k)^2,$$

$$\xi \in (x, x_k) \quad \text{bzw.} \quad \xi \in (x_k, x).$$

Für $x = x^*$ wird $f(x^*) = 0$ und damit

¹² Brook Taylor (1685 - 1731), englischer Mathematiker

$$\begin{aligned}
0 &= f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x^* - x_k)^2, \\
-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} &= x^* - x_k + \frac{\frac{1}{2} f''(\xi)(x^* - x_k)^2}{f'(x_k)}, \\
x_{k+1} - x_k &= x^* - x_k + \frac{\frac{1}{2} f''(\xi)(x^* - x_k)^2}{f'(x_k)}, \\
x_{k+1} - x^* &= \frac{f''(\xi)}{2f'(x_k)} (x_k - x^*)^2, \\
|x_{k+1} - x^*| &\leq \frac{M}{2m} |x_k - x^*|^2.
\end{aligned}$$

Setzt man $\frac{M}{2m} = C$ und führt die Abschätzung fort, so erhält man schließlich die a-priori-

Abschätzung

$$|x_k - x^*| < C^{2^{k-1}} |b - a|^{2^k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

für das Abbrechen des Newtonverfahrens nach dem k -ten.

Die a-posteriori-Abschätzung folgt analog. Es gilt

$$\begin{aligned}
f(x_{k+1}) &= f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \frac{1}{2} f''(\xi_1)(x_{k+1} - x_k)^2, \\
\xi_1 &\in (x_{k+1}, x_k) \quad \text{bzw.} \quad \xi_1 \in (x_k, x_{k+1}), \\
f(x_{k+1}) &= \frac{1}{2} f''(\xi_1)(x_{k+1} - x_k)^2, \\
|f(x_{k+1})| &\leq \frac{1}{2} M |x_{k+1} - x_k|^2.
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
f(x_{k+1}) - f(x^*) &= (x_{k+1} - x^*) f'(\xi_2), \\
\xi_2 &\in (x_{k+1}, x^*) \quad \text{bzw.} \quad \xi_2 \in (x^*, x_{k+1})
\end{aligned}$$

und damit

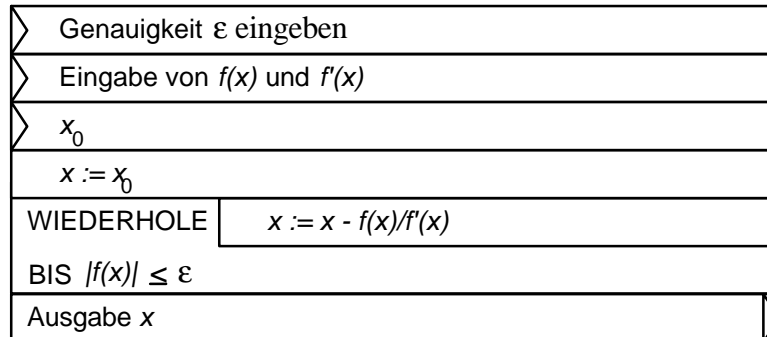
$$|f(x_{k+1})| \geq m |x_{k+1} - x^*|.$$

Schließlich ist die a-posteriori-Abschätzung

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{M}{2m} |x_{k+1} - x_k|^2.$$

3.3.1.4 Programmierung

Das folgenden Struktogramm soll den Ablauf verdeutlichen:



Struktogramm 3: Das Newton-Verfahren

3.3.2 Darstellung mittels MAYA

Wiederum wählt man die Menüfolge „Nullstellenbestimmung - Funktionsweisen verschiedener Verfahren“. Man beachte, daß das Programm MAYA die Eingabe der Ableitung der Funktion $f(x)$ fordert. Das Programm kann die Ableitung nicht selbständig berechnen.

Beispiel 16:

	$F(X) = \text{SIN}(X)$		
X Intervall:		Y Intervall:	
Untergrenze	1.6	Untergrenze	-1
Obergrenze	4.3	Obergrenze	1
Verfahren (R/S/N/V/M):	N	Anzahl d. Iterationen:	10
N : Newton-Verfahren		Startwert X_0	2
	$F'(X) = \text{COS}(X)$		

Die etwas überarbeitete grafische Darstellung ist in Abb. 7 zu sehen.

□

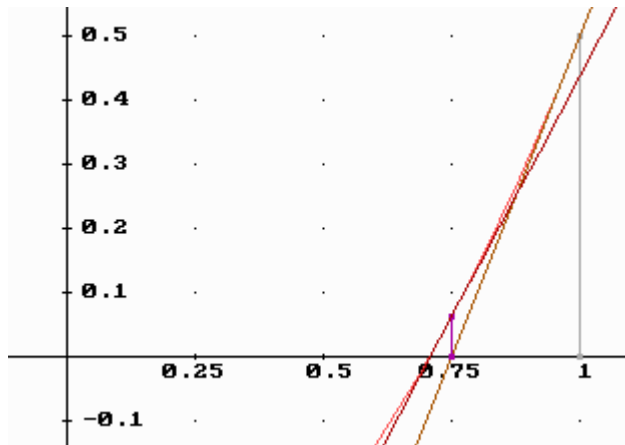
3.3.3 Darstellung mittels DERIVE

Die Datei „NEWTON.MTH“ enthält eine Reihe von Funktionen, die zur Visualisierung des Newtonverfahrens dienen. Neben der Berechnung der Iterationswerte durch die Funktion NEW_COL, NEW_ROW bzw. NEWTON bestimmt die Funktion TANGENT die Funktionsgleichung der Tangente an die Funktion $f(x)$ im Startpunkt $(x_0, f(x_0))$. Die Zusammenfassung der Tangenten und vertikalen Verbindungsstücke übernimmt die Funktion TAN_FAM. Man betrachte hierzu folgendes Beispiel.

Beispiel 17:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2 - 2$. Die Funktion besitzt im Intervall $x \in [0, 2]$ eine Nullstelle, die mittels Newton-Verfahren ermittelt werden soll. Unter Verwendung der Datei „NEWTON.MTH“ erhält man folgenden Ablauf:

- ◆ "Eine mögliche Funktion $u(x)$ ist:"
- ◆ $u := x^2 - 0.5$
- ◆ "Der Startwert sei $x_0 = 1$, die Schrittzahl gleich 2:"
- ◆ `NEW_COL(u,x,1,2)`
- ◆ 0.70833
- ◆ "Es erfolgt die Vorbereitung zum Darstellen:"
- ◆ `TAN_FAM(u,1,2)`
- ◆
$$\left(\begin{array}{cc|c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & & 2x - 1.5 \\ \begin{pmatrix} 0.75 & 0.75 \\ 0.75 & 0.0625 \end{pmatrix} & & 1.5x - 1.0625 \end{array} \right)$$
- ◆ "Bitte `OPTIONS STATE CONNECTED` einstellen und dann u und `TAN_FAM` plotten"



Natürlich führt die Erhöhung der Schrittzahl zu einem genaueren Nullstellenwert, aber die grafische Darstellung wird dadurch sehr schnell unübersichtlich. ✘

3.3.4 Darstellung mittels MathCad

Durch die sehr schnelle Konvergenz des Verfahrens ist die Visualisierung problematisch (Datei „NEWTON.MCD“). Deshalb wird nach jedem Iterationsschritt die grafische Darstellung vergrößert.

Beispiel 18:

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := e^x - x - 3 \quad \text{mit } x := 1, 1.01 \dots 2$$

Die in diesem Intervall liegende Nullstelle ist gesucht. Der Startwert sei:

$$x_0 := 1.1$$

Man bildet zunächst die Ableitung der Funktion $f(x)$

$$f'(x) := e^x - 1$$

Die Iterationsvorschrift für das Newtonverfahren lautet:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad k=0, 1, \dots$$

Die Funktionsgleichung der Tangente (blau) an die Funktion $f(x)$ im Punkt x_0 lautet:

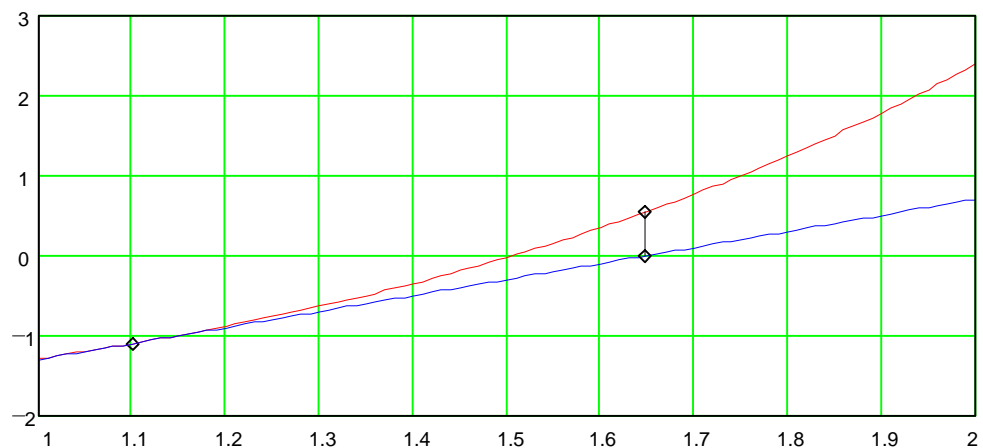
$$t(x) := f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Damit beginnt die Iteration:

$$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad x_1 = 1.647 \quad f(x_1) = 0.543$$

Für die grafische Ausgabe benötigt man den Vektor v , welche die Verbindungsgerade zwischen $f(x_1)$ und $t(x_1)$ zeichnet.

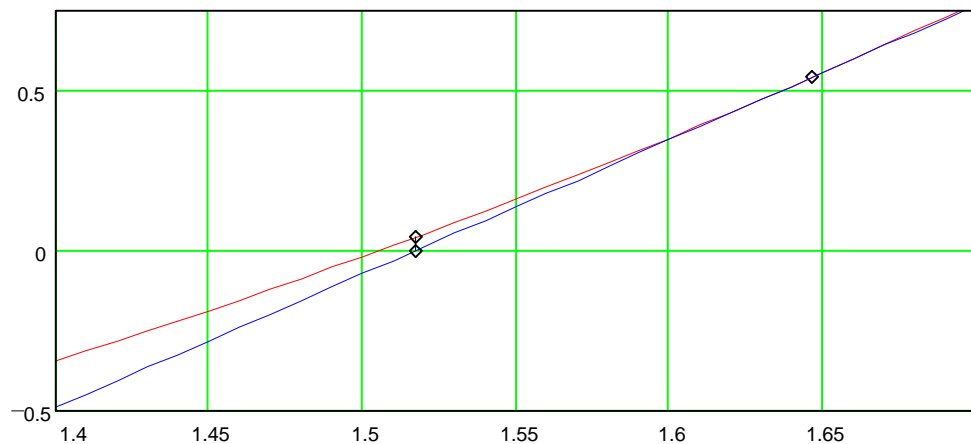
$$v := (t(x_1) \ f(x_1))^T \quad i := 0 \dots 3$$



Der nächste Iterationsschritt liefert:

$$x_2 := x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad x_2 = 1.517 \quad f(x_2) = 0.042$$

Die *vergrößerte* Grafik zeigt:



Der dritte Iterationsschritt liefert:

$$x_3 := x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \quad x_3 = 1.505 \quad f(x_3) = 0.00031$$

Somit ergibt sich bereits nach dem dritten Schritt der iterierte Wert $x_3 = 1.505$. Eine weitere grafische Auflösung ist an dieser Stelle nicht mehr sinnvoll. \square

3.3.5 Mathematische Beschreibung des Modifiziertes Newtonverfahren

Eine Bedingung des Newtonverfahrens ist, daß $f'(x) \neq 0$ in dem zu betrachtenden Intervall sein muß. Bei einer mehrfachen Nullstelle ist diese Bedingung aber verletzt, da bei einer Nullstelle der Vielfachheit m

$$f(x^*) = f'(x^*) = \dots = f^{(m-1)}(x^*) = 0, \quad f^{(m)}(x^*) \neq 0$$

gilt. Man erhält für $m = 2$ unter Verwendung der üblichen Iterationsvorschrift und unter Beachtung der L'HOSPITALSchen Regeln¹³

$$\begin{aligned} g'(x^*) &= \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{f'(x)f''(x) + f(x)f'''(x)}{2f'(x)f''(x)} \\ &= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{f'(x)f'''(x) + f(x)f^{(4)}(x)}{2f''^2(x) + 2f'(x)f'''(x)} \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

¹³ Marquis de l'Hospital (1661 - 1704), französischer Mathematiker; veröffentlichte die von Johann Bernoulli (1667 - 1748) aufgestellten Regeln erstmals

wenn man $f(x)$ als viermal stetig differenzierbar voraussetzt. Das Newtonverfahren hat in diesem Fall die Konvergenzordnung 1, kann aber grundsätzlich angewandt werden. Allerdings muß bei der Forderung $f'(x) \neq 0$ für alle x aus dem betrachteten Intervall den Punkt x^* ausgeschlossen werden. Möchte man wieder die Konvergenzordnung 2 erreichen, so muß das Newtonverfahren modifiziert werden.

Die Funktion $f(x)$ sei $(m + 1)$ -mal stetig differenzierbar in einem Intervall I , in dem sie eine Nullstelle x^* der Vielfachheit $m \geq 2$ besitzt. Dann gibt es ein Intervall $I_\Delta = (x^* - \Delta, x^* + \Delta)$, in dem das Iterationsverfahren

$$x_{k+1} = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

für jeden Startwert $x_0 \in I_\Delta$ konvergiert und mindestens die Konvergenzordnung 2 hat.

Der Beweis ist in [1] ausführlich dargestellt.

In der so dargestellten Fassung hat das Verfahren allerdings den Nachteil, daß die Vielfachheit der Nullstelle in den seltensten Fällen bekannt ist. Dennoch läßt sich ein quadratisch konvergentes Verfahren angeben:

$$x_{k+1} = x_k - m(x_k) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$\text{mit } m(x_k) = \frac{1}{1 - \frac{f(x_k)f''(x_k)}{f'(x_k)^2}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

und es gilt gleichzeitig

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^* \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} m(x_k) = m.$$

Beispiel 19:

Sei $f(x) = x^5 + 11x^4 + 42x^3 + 54x^2 - 27x - 81$, mit $-4 \leq x \leq -2$. Es liegt im angegebenen Intervall eine Nullstelle unbekannter Vielfachheit. Das modifizierte Newton-Verfahren ergibt nach Bildung der Ableitungen sowie Einsetzen und Kürzen in der entsprechenden Formel

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - 1)(5x_k^2 + 14x_k - 3)}{5x_k^2 - 2x_k + 13}$$

mit dem Startwert $x_0 = -2$.

k	x_k
0	-2
1	-2,891891892
2	-2,999228544
3	-2,999999963
4	-3

Tab. 4: Näherungswerte

Hätte man nicht mit dem modifizierten Newtonverfahren, sondern mit dem klassischen Newtonverfahren gerechnet, ergebe sich folgende Tabelle:

k	x_k
0	-2
1	-2,272727273
2	-2,465240642
3	-2,604295242
4	-2,706013261
5	-2,780997003
6	-2,83655222

Tab. 5: Näherungswerte

Hierbei erkennt man deutlich den „Verlust“ der quadratischen Konvergenz der Newtonverfahrens, wenn es sich um mehrfache Nullstellen handelt.

3.3.6 Mathematische Beschreibung des Vereinfachten Newtonverfahrens

Trotz seiner quadratischen Konvergenz ist das Newtonverfahren sehr aufwendig, da in jedem Iterationsschritt der Funktions- und Ableitungswert neu berechnet werden muß. Beim vereinfachten Newton-Verfahren hingegen berechnet man den Ableitungswert nur ein mal. Die Iterationsvorschrift ist demnach

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Das hat zur Folge, daß sich die Konvergenz verlangsamt.

Die geometrische Interpretation des vereinfachten Newtonverfahrens zeigt, daß nur im ersten Schritt die Tangente an die Funktion in Startpunkt berechnet wird. Jeder weitere Schritt verschiebt die Tangente parallel zum jeweiligen Funktionswert des Iterationspunktes.

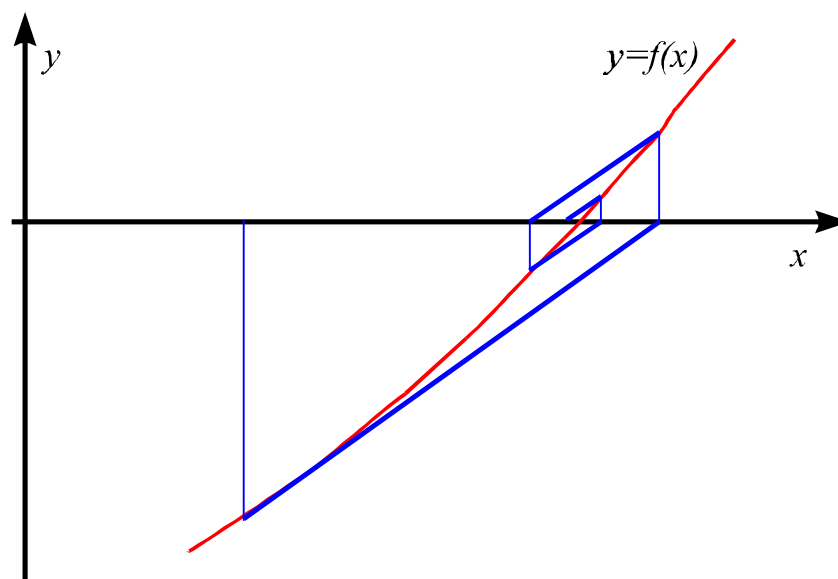


Abb. 8: Vereinfachtes Newtonverfahren

3.4 Sekantenverfahren - Regula falsi

3.4.1 Mathematische Beschreibung

Das Newtonverfahren hat den Nachteil, daß bei jedem Schritt der Funktionswert $f(x_k)$ und der Ableitungswert $f'(x_k)$ berechnet werden müssen. Dieser Aufwand kann etwas reduziert werden, indem statt der im Newton-Verfahren auftretende Ableitung $f'(x_k)$ der Differenzenquotient

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

eingesetzt wird. So entsteht ein weiteres Iterationsverfahren - das Sekantenverfahren oder auch Regula falsi¹⁴. Es besitzt die Vorschrift

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (12)$$

und benötigt zwei Startwerte.

Über einfache Umformungen erhält man die numerisch günstigere Form

$$x_{k+1} = \frac{f(x_k)x_{k-1} - f(x_{k-1})x_k}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Geometrisch bedeutet das Verfahren, durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ ist eine Sekante zu legen. Der Schnittpunkt der Sekante mit der Abszisse liefert den ersten Näherungswert x_2 für x^* . Durch den neu entstandenen Punkt $(x_2, f(x_2))$ und den alten vorhergehenden Punkt $(x_1, f(x_1))$ wird wiederum eine Sekante gelegt und der Näherungswert x_3 gefunden, usw.

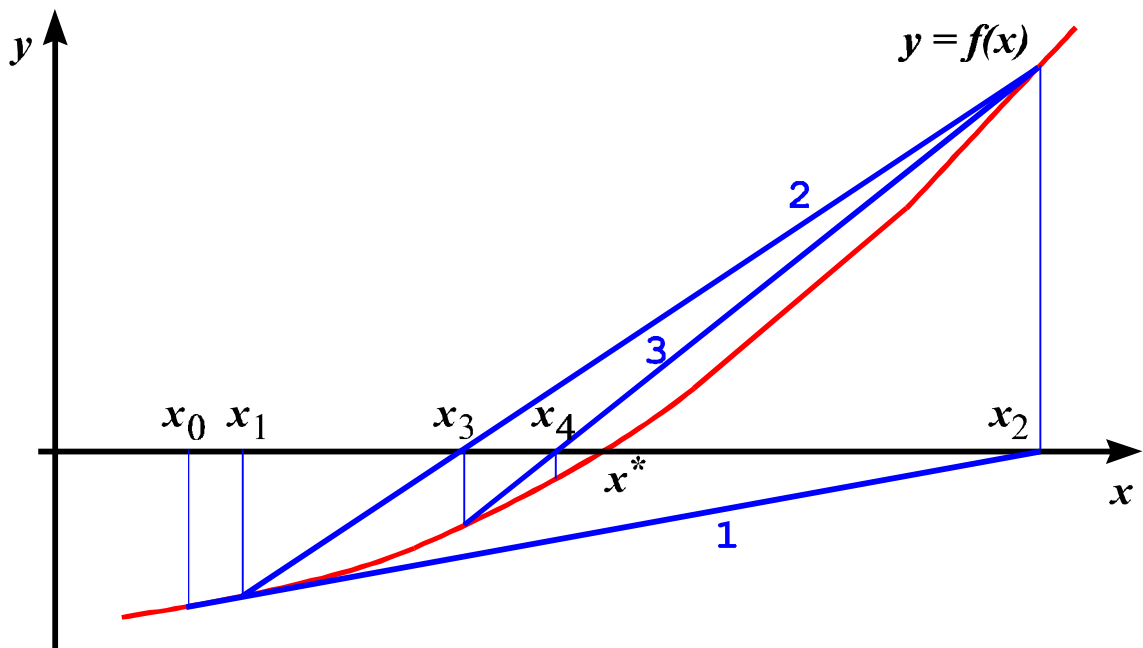


Abb. 9: Das Sekantenverfahren. Die Sekanten wurden gemäß ihrer Entstehung nummeriert.

Die Konvergenz und die Konvergenzordnung lassen sich nicht mit den hier hergeleiteten Sätzen bestimmen. In [2] findet man eine ausführliche Herleitung der Konvergenzordnung, die für dieses Verfahren bei $p \approx 1,62$ liegt. Es zeigt sich also, daß

¹⁴ regula falsi (lat.) = „Regel des Falschen“ - da von Sekanten ausgegangen wird

das sich Sekantenverfahren bezüglich der Konvergenzordnung zwischen dem allgemeinen Iterationsverfahren und dem Newton-Verfahren befindet.

Es existieren allerdings noch zwei weitere Formen der Regula falsi. Zum einen die sogenannte Primitivform. Bei dieser achtet man darauf, daß die Funktionswerte $f(x_k)$ und $f(x_{k-1})$ immer entgegengesetzte Vorzeichen haben. Die Iterationsvorschrift lautet demnach

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_n - x_k}{f(x_n) - f(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, \dots$$

wobei n der größte Index unterhalb von k ist, für den $f(x_k) \cdot f(x_n) < 0$ mit $f(x_k) \neq 0$ und $f(x_n) \neq 0$ gilt. Für die Startwerte x_0 und x_1 muß somit auch $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$ sein. Die Primitivform besitzt die Konvergenzordnung 1.

In der zweiten, primitiven Variante bleibt der erste Startwert x_B für alle Iterationsschritte bestehen und dient als Bezugspunkt. Es wird also immer eine Sekante durch den Punkt $(x_B, f(x_B))$ und den aus der Iteration entstandenen Punkt $(x_k, f(x_k))$ gelegt. Damit ergibt sich die Iterationsvorschrift zu

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_B}{f(x_k) - f(x_B)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Die Aussagen zum Sekantenverfahren fordern immer eine einfache Nullstelle. Handelt es sich nämlich um eine mehrfache Nullstelle, so konvergiert das Verfahren zwar, aber die hohe Konvergenzordnung geht verloren. Um die Konvergenz auch bei mehrfachen Nullstellen zu sichern, muß man das Verfahren abwandeln.

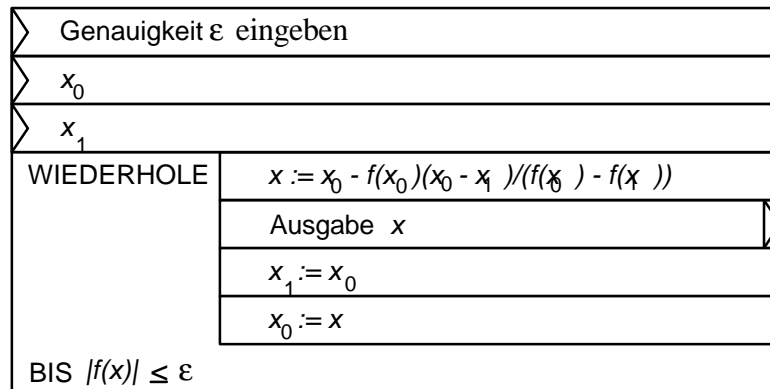
Ist x^* eine Nullstelle der Vielfachheit m und f und $|f^{(m+1)}(x)|$ in der Umgebung von x^* beschränkt, so ist x^* einfache Nullstelle der Funktion h mit

$$h(x) = \frac{f^2(x)}{f(x + f(x)) - f(x)} \quad (13)$$

und $|h''(x)|$ beschränkt in der Umgebung von x^* . Verwendet man in der Iterationsvorschrift der Regula falsi (12) statt f die Funktion h gemäß ihrer Definition (13), so konvergiert diese modifizierte Regula falsi ebenfalls von der Ordnung $q \approx 1,62$ gegen die mehrfache Nullstelle x^* von f . Der Beweis dieser Aussage ist in [2] zu finden.

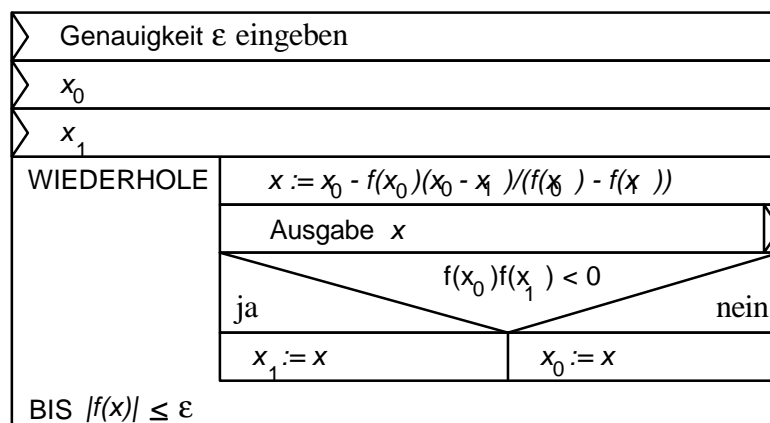
3.4.2 Programmierung

Den Algorithmus der Regula falsi zeigt folgendes Struktogramm.



Struktogramm 4: Die Regula falsi

Das Struktogramm für die Primitivform der Regula falsi benötigt noch eine zusätzliche Abfrage.



Struktogramm 5: Die Primitivform der Regula falsi

3.4.3 Darstellung mittels MAYA

Wiederum wählt man die Menüfolge „Nullstellenbestimmung - Funktionsweisen verschiedener Verfahren“. Man beachte, daß das Programm MAYA unter der Regula falsi die Primitivform und unter dem Sekantenverfahren die eigentliche Regula falsi versteht. Ein Ergebnis des Sekantenverfahrens zeigt Abb. 9.

3.4.4 Darstellung mittels DERIVE

Die Datei „REGULA.MTH“ enthält zwei Beispiel für die Anwendung der Regula falsi mit DERIVE. Da immer die letzten beiden Werte bzw. die beiden Startwerte in die

Berechnung einfließen, ist die grafische Darstellung nicht möglich. Allein die Berechnung bedarf einiger Tricks, so daß an dieser Stelle nur die Primitivform betrachtet werden soll.

Beispiel 20:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2 - 2$. Die Funktion besitzt im Intervall $x \in [0, 2]$ eine Nullstelle, die mittels Regula falsi ermittelt werden soll. Unter Verwendung der Datei „REGULA.MTH“ erhält man folgenden Ablauf:

- ◆ "Definieren zunächst die Startwerte und die zu betrachtende Funktion u"
- ◆ $i := [a, b]$
- ◆ $u(x) := x^2 - 2$
- ◆ "Benötigen nun folgende Funktionen:"
- ◆ $SEK(i) := ELEMENT(i,1) + \frac{U(ELEMENT(i,1)) (ELEMENT(i,2) - ELEMENT(i,1))}{U(ELEMENT(i,1)) - U(ELEMENT(i,2))}$
- ◆ $REK(i) := IF(U(ELEMENT(i,1)) U(SEK(i)) < 0, [ELEMENT(i,1), SEK(i)], [SEK(i), ELEMENT(i,2)])$
- ◆ $REGULA(s, v, n) := ITERATES(v, w, s, n)$
- ◆ "Beispiel 1:"
- ◆ $REGULA([1, 2], REK(w), 3)$
- ◆ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{4}{3} & 2 \\ \frac{7}{5} & 2 \\ \frac{24}{17} & 2 \end{pmatrix}$ □

3.4.5 Darstellung mittels MathCad

Die Visualisierung der Regula falsi ist unproblematisch. Die Datei „REGULA.MCD“ enthält dieses Beispiel zur gewöhnlichen Regula falsi.

Beispiel 21:

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := x^3 - 2 \cdot x + 1 \quad \text{mit } x := -3.5, -3.4 \dots -0.5$$

Die in diesem Intervall liegende Nullstelle ist gesucht. Die Iterationsvorschrift für die Regula falsi lautet:

$$x_{k+1} = \frac{f(x_k) \cdot x_{k-1} - f(x_{k-1}) \cdot x_k}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad k := 1, 2 \dots 5$$

Wählen als Startwerte

$$x_1 := -3 \quad x_2 := -2.5$$

Damit beginnt die Iteration

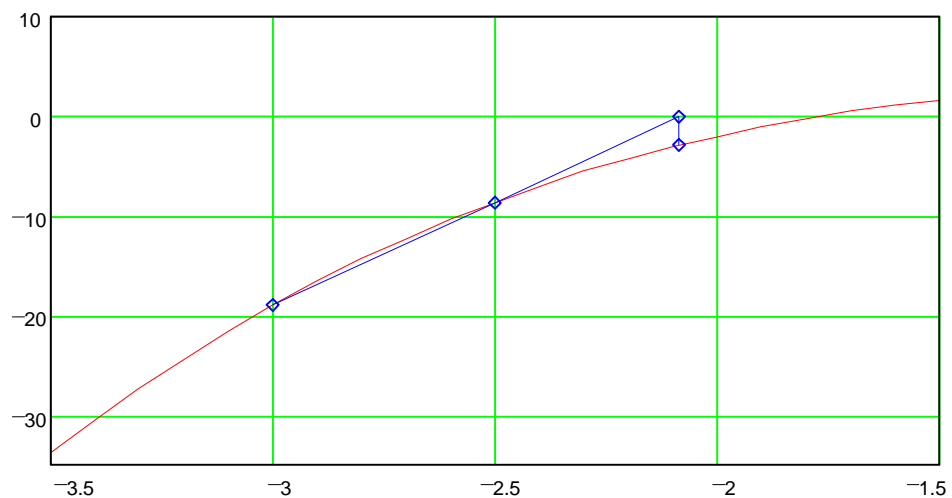
$$x_3 := \frac{f(x_2) \cdot x_1 - f(x_1) \cdot x_2}{f(x_2) - f(x_1)} \quad x_3 = -2.084 \quad f(x_3) = -2.887$$

Die folgenden Vektoren werden für die Visualisierung benötigt. Der Vektor v enthält die x -Komponenten, der Vektor w die y -Komponenten der zu zeichnenden Punkte.

$$v := (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_3)^T$$

$$w := (f(x_1) \ f(x_2) \ 0 \ f(x_3))^T \quad i := 0 .. 1$$

Die grafische Darstellung zeigt die Sekante zwischen den Funktionswerten der beiden Startwerte, den Schnittpunkt mit der Abszisse und die Projektion auf die Funktion $f(x)$:



Damit ergeben sich die neuen Startwerte

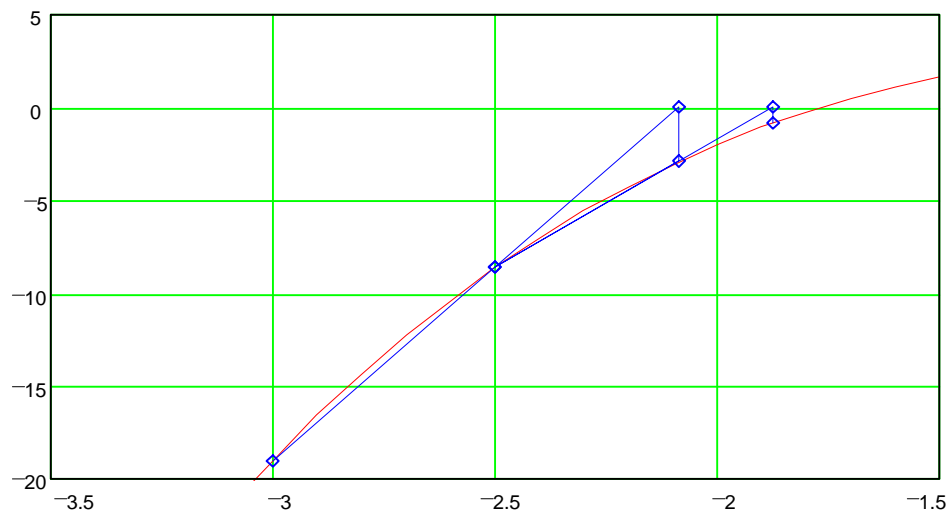
$$x_2 = -2.5 \quad x_3 = -2.084$$

... und die Iteration zu

$$x_4 := \frac{f(x_3) \cdot x_2 - f(x_2) \cdot x_3}{f(x_3) - f(x_2)} \quad x_4 = -1.875 \quad f(x_4) = -0.844$$

$$v := (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_3 \ x_2 \ x_4 \ x_4)^T$$

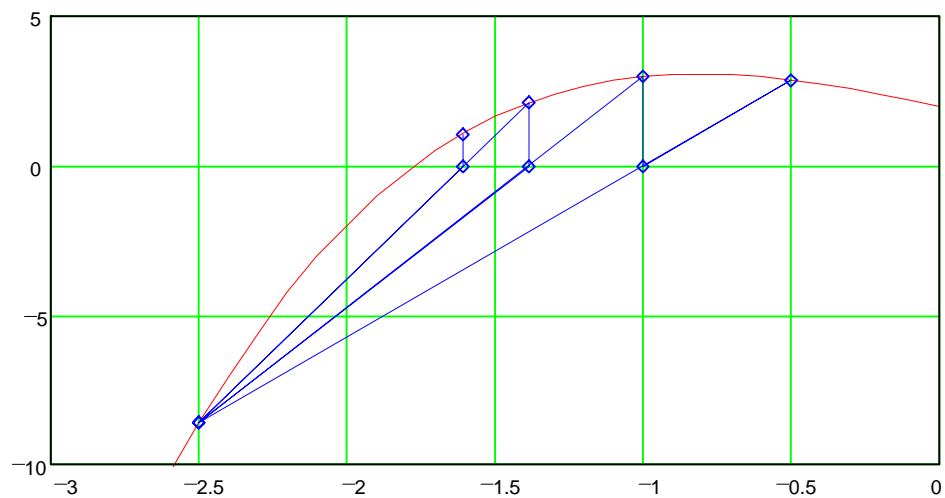
$$w := (f(x_1) \ f(x_2) \ 0 \ f(x_3) \ f(x_2) \ 0 \ f(x_4))^T \quad i := 0 .. 1$$



Der dritte Iterationsschritt liefert den Wert $x_5 = -1.789$.

⌘

Wird obiges Beispiel mit der Primitivform der Regula falsi gerechnet (Datei „FALSI_PR.MCD“), so ergibt sich nach dem dritten Iterationsschritt der Wert $x_5 = -1.605$ und folgende Abbildung:



Hierbei wurden als Startwerte $x_1 = -2.5$ und $x_2 = -0.5$ gewählt.

⌘

3.5 Steffensen-Verfahren

3.5.1 Mathematische Beschreibung

Es liege eine zur Gleichung $f(x) = 0$ in $I = [a, b]$ äquivalente Gleichung $x = g(x)$ vor; x^* sei in (a, b) die einzige Lösung von $f(x) = 0$ bzw. $x = g(x)$. Gemäß dem Banachschen Fixpunktsatz (Seite 20) konvergiert das Iterationsverfahren mit der Schrittfunction g gegen x^* , sofern überall in I gelten

$$(i) \quad |g'(x)| \leq q < 1$$

$$(ii) \quad g(x) \in I.$$

Mit der Schrittfunktion g läßt sich nun ein Iterationsverfahren aufbauen, das sowohl für $|g'(x)| < 1$ als auch für $|g'(x)| > 1$ gegen x^* konvergiert, und zwar quadratisch. Dieses Verfahren heißt Steffensen-Verfahren oder Verfahren der linearen Extrapolation und besitzt gegenüber dem Newtonverfahren den Vorteil, bei gleicher Konvergenz ohne Ableitungen auszukommen.

Ausgehend vom Verfahren $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, \dots$, geht man zur günstigeren Iterationsvorschrift

$$x_{k+1} = G(x_k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

über, indem man folgende anschauliche Überlegung verwendet (siehe auch Abb. 10): Zunächst führt man zwei Iterationsschritte nach der „alten“ Vorschrift $x_{k+1} = g(x_k)$ durch, d.h., man bestimmt $g(x_0)$ und $g(g(x_0))$. Dann legt man durch die Punkte $(x_0, g(x_0))$ und $(g(x_0), g(g(x_0)))$ die Verbindungsgerade und bestimmt deren Schnittstelle \bar{x} mit der Geraden $y = x$. Diesen Wert verwendet man als neuen Näherungswert und wiederholt den Vorgang. Die Gleichung für die Sehne lautet

$$y = g(x_0) + (x - x_0) \frac{g(g(x_0)) - g(x_0)}{g(x_0) - x_0},$$

und für die Schnittpunktskoordinate \bar{x} erhält man

$$\bar{x} = \frac{x_0 g(g(x_0)) - (g(x_0))^2}{g(g(x_0)) - 2g(x_0) + x_0}.$$

(Hinweis: Der Nenner wird Null, wenn die Sehne parallel zur Geraden $y = x$ verläuft). Verwendet man nun \bar{x} als neuen Näherungswert x_1 und wiederholt diesen Vorgang, so erhält man folgende Iterationsvorschrift:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(g(x_k) - x_k)^2}{g(g(x_k)) - 2g(x_k) + x_k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

bzw. etwas umgeformt

$$x_{k+1} = \frac{x_k g(g(x_k)) - (g(x_k))^2}{g(g(x_k)) - 2g(x_k) + x_k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

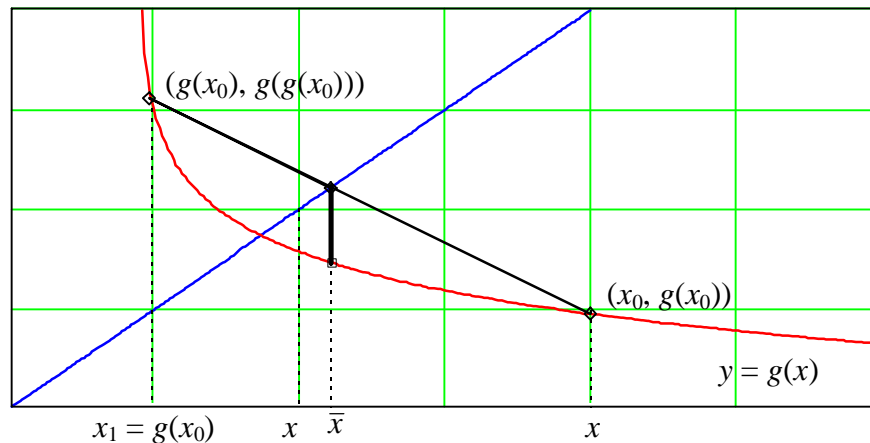


Abb. 10: Das Steffensen-Verfahren nach dem ersten Iterationsschritt

Man kann zeigen, daß das Verfahren mit der Konvergenzordnung gleich zwei gegen die gesuchte Lösung x^* konvergiert für jedem Startwert x_0 aus einem (hinreichend kleinem) Intervall um x^* , wenn $g(x)$ in diesem Intervall dreimal stetig differenzierbar ist und gilt $g'(x) \neq 1$. Den Beweis hierzu findet man in [2]. Nachteil dieses Verfahrens ist, daß es nur im Falle einfacher Nullstellen anwendbar ist. Deshalb benötigt man ein modifiziertes Steffensen-Verfahren für mehrfache Nullstellen.

Das folgende modifizierte Verfahren von Steffensen ist im Falle mehrfacher Nullstellen anzuwenden; es liefert die Nullstelle und deren Vielfachheit.

Die Funktion g sein in $I = [a, b]$ hinreichend oft differenzierbar und die Gleichung $x = g(x)$ mit $g(x) = x - f(x)$ besitze in (a, b) eine einzige Lösung x^* der Vielfachheit $m \geq 2$. Dann konvergiert das Iterationsverfahren

$$x_{k+1} = x_k - m(x_k) \frac{(g(x_k) - x_k)^2}{z(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{mit } m(x_k) = \frac{(z(x_k))^2}{(z(x_k))^2 + (x_k - g(x_k))(z(x_k) + g(2x_k - g(x_k)) - x_k)}$$

$$\text{und } z(x) = g(g(x_k)) - 2g(x_k) + x_k$$

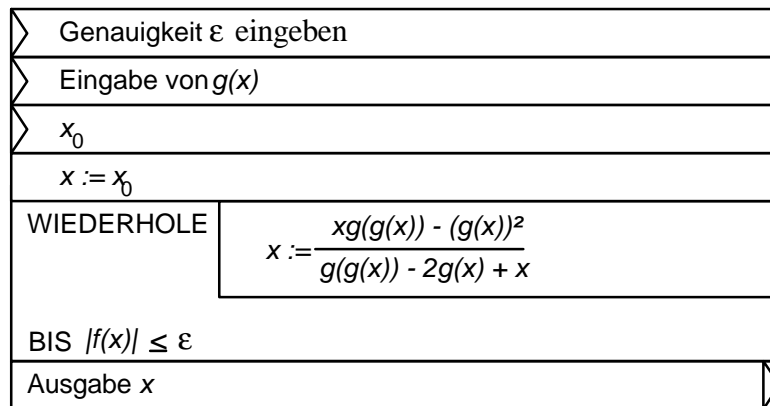
für jeden beliebigen Startwert $x_0 \in I$ von mindestens zweiter Ordnung gegen x^* ; es gilt gleichzeitig

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m(x_k) = m.$$

Hinweis: Zur Vermeidung einer Anhäufung von Rundungsfehlern sollte hier mit doppelter Wortlänge gerechnet werden.

3.5.2 Programmierung

Das folgenden Struktogramm soll den Ablauf verdeutlichen:



Struktogramm 6: Das Steffensen-Verfahren

3.5.3 Darstellung mittels MAYA

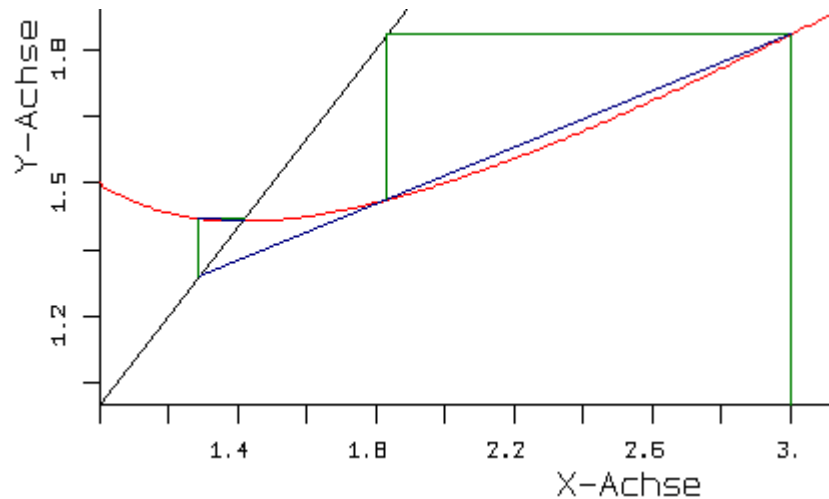
Im Programm MAYA findet man das allgemeine Iterationsverfahren unter dem Punkt Nullstellenbestimmung - Fixpunktiteration und Steffensen-Verfahren.

Beispiel 22:

In die Eingabemaske wird die bereits umgestellte Funktion $g(x)$, der Definitions- und Wertebereich eingegeben. Man beachte, daß bei einer zu großen Anzahl von Iterationen das Programm die Fehlermeldung „Nenner wird Null“ ausgibt und die iterierte Nullstelle gleich Null setzt, obwohl die Grafik korrekt angezeigt wird.

$G(X) = 0.5 * (X + 2/X)$			
X Intervall:		Y Intervall:	
Untergrenze	1	Untergrenze	0
Obergrenze	4.1	Obergrenze	2.5
	Startwert X_0:		3
Verfahren:	S		
Anzahl der Iterationen:	2		

Somit erhält man:



In MAYA verwirrt zunächst die Parallele zur x -Achse. Diese Gerade dient jedoch der grafischen Bestimmung des Punktes $(g(x_0), g(g(x_0)))$. □

3.5.4 Darstellung mittels DERIVE

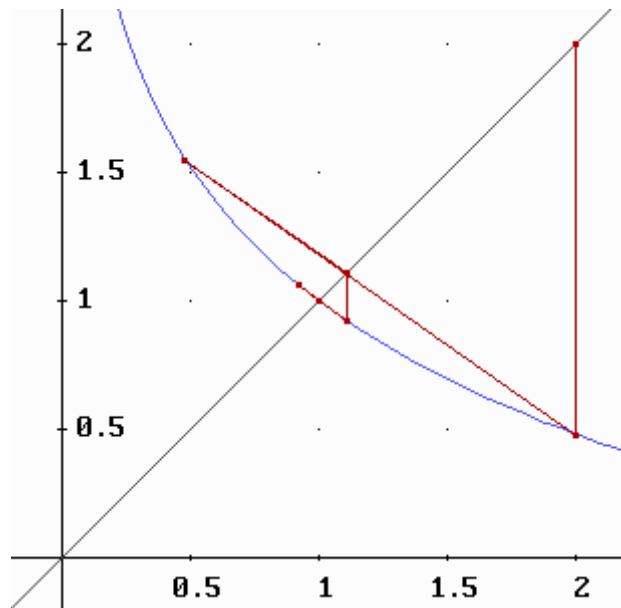
Um das Steffensen-Verfahren mit DERIVE grafisch zu behandeln, müssen zwei Funktionen definiert werden. Zum einen die einfach zu programmierende Funktion (14) und eine zum Erstellen der Visualisierungspunkte. Diese hat die Gestalt

$$\text{PUNKTE}(x_0, n) := \text{APPEND} \left[\text{ITERATES} \left(\lim_{x \rightarrow \text{ELEMENT}(v, 1, 3)} \begin{pmatrix} x & u(x) \\ u(x) & u(u(x)) \\ s(x) & s(x) \\ s(x) & u(s(x)) \end{pmatrix}, v, \begin{pmatrix} x_0 & x_0 \\ x_0 & x_0 \\ x_0 & x_0 \\ x_0 & x_0 \end{pmatrix}, n \right) \right]$$

Hierbei entspricht $s(x)$ der Funktion (14) und $u(x)$ der Funktion $g(x)$. Mit dieser Funktion ist nun eine Visualisierung möglich. Allerdings muß bei der Berechnung der Punkte etwas mehr Zeit eingeplant werden.

Beispiel 23:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = 3 \cdot \ln(x) + 4 \cdot x - 4$. Die Funktion besitzt im Intervall $x \in [0, 2]$ eine Nullstelle, die mittels Steffensen-Verfahren ermittelt werden soll. Unter Verwendung der Datei „STEFFEN.MTH“ erhält man folgende Grafik:



3.5.5 Darstellung mittels MathCad

Die Datei „STEFF_1.MCD“ enthält folgendes Beispiel.

Beispiel 24:

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := 3 \cdot \ln(x) + 4 \cdot x - 4 \text{ mit } x := 0.01, 0.02 \dots 3$$

Die in diesem Intervall liegende Nullstelle ist gesucht. Der Startwert liegt bei:

$$x_0 := 2$$

Eine geeignete Umstellung der Funktion $f(x)$ ist:

$$g(x) := 1 - \frac{3}{4} \cdot \ln(x)$$

Die Iterationsvorschrift für das Steffensen-Verfahren lautet:

$$x_{k+1} = G(x_k) \quad \text{mit} \quad G(x) := \frac{x \cdot g(g(x)) - g(x)^2}{g(g(x)) - 2 \cdot g(x) + x}$$

Damit beginnt die Iteration

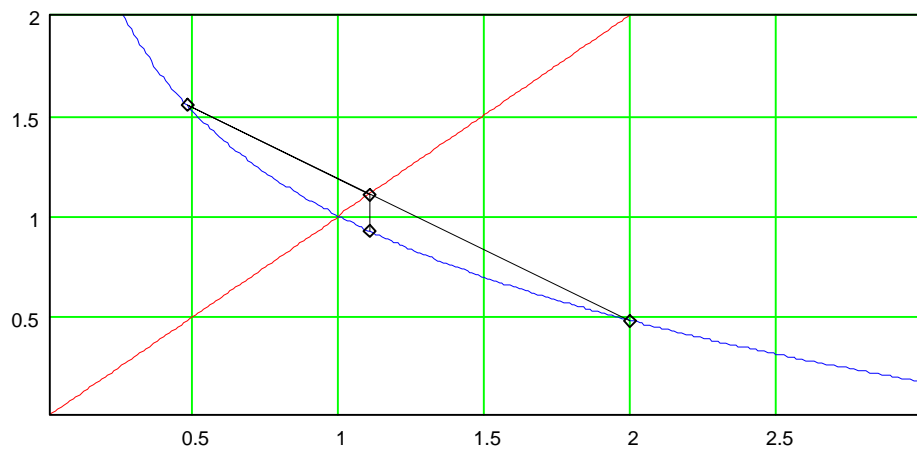
$$x_1 = G(x_0) \quad x_1 = 1.10811$$

Die folgenden Vektoren werden für die Visualisierung benötigt. Der Vektor v enthält die x -Komponenten, der Vektor w die y -Komponenten der zu zeichnenden Punkte.

$$v := (x_0 \quad g(x_0) \quad x_1 \quad x_1)^T \quad y(x) := x$$

$$w := (g(x_0) \quad g(g(x_0)) \quad 0 \quad g(x_1))^T \quad i := 0 \dots 1$$

Die grafische Darstellung zeigt die Sekante, den Schnittpunkt mit der Winkelhalbierenden und die Projektion auf die Funktion $g(x)$:

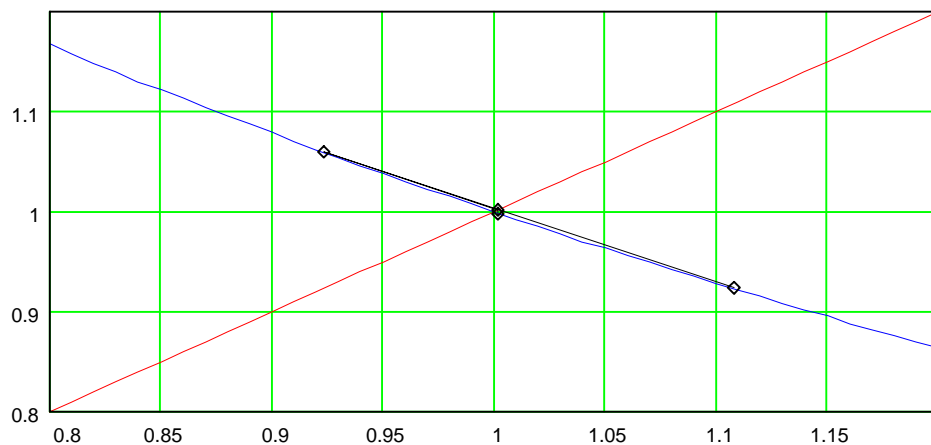


Nächster Iterationsschritt liefert:

$$x_2 := G(x_1) \quad x_2 = 1.00176$$

$$v := (x_1 \quad g(x_1) \quad x_2 \quad x_2)^T \quad y(x) := x$$

$$w := (g(x_1) \quad g(g(x_1)) \quad 0 \quad g(x_2))^T \quad i := 0 \dots 1$$



Der dritte Iterationsschritt liefert bereits den exakten Nullstellenwert $x_3 = 1$. □

Daß das Steffensen-Verfahren auch dann konvergiert, wenn das allgemeine Iterationsverfahren versagt, zeigt der Vergleich der beiden Verfahren mit der Funktion $f(x) = 2 \cdot x^2 - x$ und dem Startwert $x_0 = 1$. Die Iterationsbedingung $|f'(x)| < 1$ ist in der Umgebung der Nullstelle nicht erfüllt und somit ist keine Konvergenz der iterierten Werte vorhanden. Das Steffensen-Verfahren hingegen konvergiert gegen die Nullstelle $x^* = \frac{1}{2}$. Man betrachte dazu folgende Abbildungen der Verfahren (Dateien „STEFF_2.MCD“ und „APPROX_2.MCD“).

Literaturverzeichnis

Wissenschaftliche Literatur (z. T. mit Programmierung):

- [1] SCHNEIDER, M: Numerische Mathematik. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1991. (Kapitel 3: Seite 26ff)
- [2] ENGELN-MÜLLGES, G.; REUTTER, F: Formelsammlung zur Numerischen Mathematik mit Turbo PASCAL-Programmen: Mannheim: Bibliographisches Institut & F. A. Brookhaus 1991. (Kapitel 2: Seite 11ff)
- [3] STOER, JOSEF: Numerische Mathematik: eine Einführung - unter Berücksichtigung von Vorlesungen von F. L. Bauer / Josef Stoer. 5. Aufl. Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo; Hong Kong: Springer-Verlag 1989. (Kapitel 5: Seite 241ff)
- [4] SCHABACK, ROBERT: Numerische Mathematik. 4., vollst. überarb. Aufl. - Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo; Hong Kong; Barcelona; Budapest: Springer-Verlag 1992. (Kapitel 6-9: Seite 90ff)
- [5] HÄMMERLIN, GÜNTHER: Numerische Mathematik. Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo: Springer-Verlag 1989. (Kapitel 8: Seite 350ff)
- [6] BRONSTEIN, SEMENDJAJEW: Taschenbuch der Mathematik. 25., durchges. Aufl. Stuttgart, Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft und Verlag Nauka, Moskau 1991. (Kapitel 7: Seite 735)
- [7] KERNER, I. O.: Numerische Mathematik mit Kleinstrechnern. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1985. (Seite 56ff)
- [8] KOSE, KIM; SCHRÖDER, ROLF; WIELICZEK, KORNEL: Numerik sehen und verstehen - Ein kombiniertes Lehr- und Arbeitsbuch mit Visualisierungssoftware. Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg Verlag 1992. (Seite 165ff)

Schulliteratur:

- [9] BOCK, HANS; WALSCH, WERNER: Mathematik: entdecken - verstehen - anwenden. München: R. Oldenbourg Verlag GmbH 1993. (Seite 48ff, 198ff)

- [10] ATHEN / BRUHN: Lexikon der Schulmathematik. genehmigte Ausgabe für Weltbild Verlag GmbH, Augsburg 1994. Aulis Verlag Deubner u. Co. KG, Köln. Bd. 2. (Seite 461)
- [11] HILBERT, ALFRED: Mathematik. 2. Aufl. Leipzig: Fachbuchverl., 1989. (Kapitel 13: Seite 627ff)

Literatur zur Programmierung:

- [12] Kleinstrechner-TIPS/Hrsg. von Hans Kreul u.a. - Leipzig: Fachbuchverl., H. 5. - 1. Aufl. 1986: Girlich, Hans-Joachim: Iterationen und Feigenbaum: Mathematische Experimente mit dem Kleincomputer. (Seite 4ff; BASIC)
- [13] Kleinstrechner-TIPS/Hrsg. von Hans Kreul u.a. - Leipzig: Fachbuchverl., H. 9. - 1. Aufl. 1988: Girlich, Hans-Joachim: Iterationen und das Apfelmännchen: Mathematische Experimente mit dem Kleincomputer. (Seite 4ff)
- [14] Kleinstrechner-TIPS/Hrsg. von Hans Kreul u.a. - Leipzig: Fachbuchverl., H. 10. - 1. Aufl. 1989: Lipp, Christine; Vieweg, Steffen: Nullstellenbestimmung nichtlinearer Funktionen mit einer Veränderlichen. (Seite 30ff; BASIC)
- [15] FISCHER, PETER: BASIC für Anfänger. Berlin: Verl. Die Wirtschaft, 1987. (Seite 210ff; BASIC)
- [16] WERNER, DIETER: BASIC für Mikrorechner: Programmentwicklung, Sprachelemente, Anwendung. 2., durchges. Aufl. - Berlin: Verlag Technik, 1987. (Seite 118, BASIC)
- [17] SCHILLING, ALFRED; TÖPFER WOLFGANG: Informatik: Lehrbuch für das strukturierte Programmieren. Berlin: Verlag Volk und Wissen, 1988. (Seite 215ff, BASIC)

Literatur zu den Anwendungsprogrammen:

- [16] SCHEU, GÜNTER: Derive im Mathematik- und Physikunterricht. Bonn: Ferd. Dummlers Verlag, 1994. (Seite 53ff, DERIVE)
- [17] SCHEU, GÜNTER: Arbeitsbuch Computer-Algebra mit Derive. Bonn: Ferd. Dummlers Verlag, 1992. (Seite 60ff, DERIVE)

- [18] SCHEU, GÜNTER: Untersuchungen von Iterationsverfahren mit dem Programm DERIVE, in Praktischer Mathematikunterricht (PM), H. 1/36. Jg. 1994. (Seite 32ff.)
- [19] STERNEMANN, WILHELM: Eine „verkehrte“ Newtoniteration - Mit „ordentlicher“ Analysis und Chaos. Teil 1 + 2., in Praktischer Mathematikunterricht (PM), H. 6/34. Jg. 1992 und 5/35. Jg. 1992.
- [20] SCHARPER, RALF: Grafik mit Mathematica - Von Formeln zu den Formen. Addison Wesley Verlag. (Seite 126ff)
- [21] MAEDER, ROMAN E.: Function Iteration ans Chaos. in The Mathematica Journal., Volume 5 Issue 2. Seite 28ff.
- [22] GARCIA, ALFONSA (Hrsg.): Mathematisches Praktikum mit DERIVE. Addison Wesley Verlag. (Seite 71ff.)
- [23] KOEPF, WOLFGANG: Höhere Analysis mit DERIVE. Vieweg Verlag. (Seite 58ff.)
- [24] Benutzerhandbuch: MathCad 99 Version 3.1. (MathCad)

Internetquellen:

Programm	Internetadresse
MathCad	http://www.mathsoft.com
	http://www.softline.de
Maple	http://www.maplesoft.com
MatLab	http://www.mathworks.com
Mathematica (siehe auch [21] Seite 13)	http://www.wri.com
Derive über den Suchdienst Yahoo	http://www.yahoo.com

Erklärung

Ich erkläre, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.

Chemnitz, den 29. März 1996

Tino Hempel